Para Viver Juntos

9 Matemática

ENSINO FUNDAMENTAL 9º ano

Atividades complementares

Samuel Casal

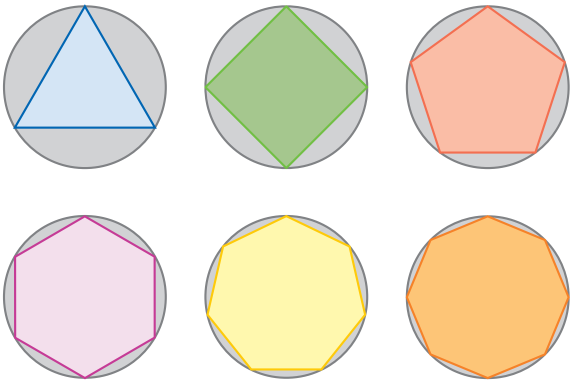
Este material é um complemento da obra **Matemática 9 – Para Viver Juntos**. Reprodução permitida somente para uso escolar. Venda proibida.

Polígonos

1. A maioria dos parafusos utilizados pelos mecânicos são os parafusos sextavados, como os da figura abaixo.

Sergey Shlyaev/Shutterstock.com

As "cabeças" (local onde se coloca as chaves de boca para apertar ou desapertar) desses parafusos têm o formato de um hexágono regular. A escolha desse tipo de formato tem algumas explicações. A primeira é a existência de lados paralelos, o que facilita o encaixe da chave de boca. A segunda tem relação com o ângulo central. Como em geral os parafusos são colocados em locais estreitos, não é necessário dar uma volta muito longa para poder encaixar a chave novamente, apenas 60°. A terceira explicação tem relação com a sequência apresentada na figura abaixo.



Explique qual é o problema físico que pode ocorrer com polígonos com mais de 6 lados e com qual elemento geométrico está relacionado.

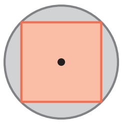
2. Determine o apótema do polígono inscrito em uma moeda antiga de 25 centavos, sabendo que o seu diâmetro é aproximadamente 24 mm e o lado do polígono inscrito é 10 mm.

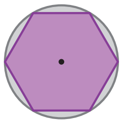
Banco Central/Reprodução: ID/BR

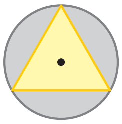
3. Determine a área do hexágono regular com lados de medida 3 cm, sabendo que o apótema tem medida $3\sqrt{3}$ cm.

4. Determine o perímetro de um quadrado, sabendo que o seu apótema mede 12 cm.

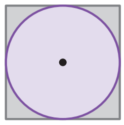
5. As circunferências mostradas abaixo têm raios iguais a 18 cm, e os polígonos nelas inscritos são regulares. Determine os lados desses polígonos.

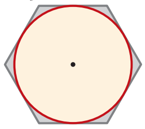
a) 

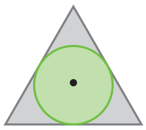
c) 

b) 

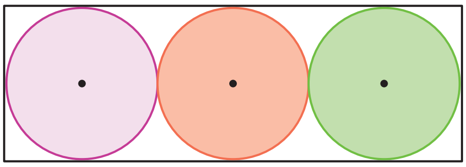
6. Cada circunferência mostrada abaixo tem raio igual a 18 cm, e os polígonos que as circunscrevem são regulares. Determine as medidas dos lados desses polígonos.

a) 

c) 

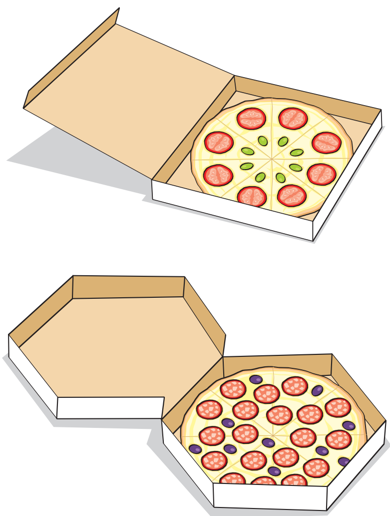
b) 

7. Em uma caixa retangular, João colocou 3 latas de tinta de mesmo diâmetro, como mostra a figura abaixo.



Determine a área de cada um dos círculos que correspondem às tampas das latas, sabendo que o perímetro da caixa retangular é 48 cm.

8. Uma determinada pizzaria produz *pizzas* com 15 polegadas de diâmetro. As *pizzas* podem ser fornecidas em duas embalagens diferentes, conforme mostra as figuras a seguir.



Hélio SenatoreID/BR

Os tipos de caixa variam de acordo com os fornecedores. Supondo que as caixas sejam feitas para acomodar *pizzas* de maneira que elas não tenham espaço para deslizar e suas tampas sejam polígonos regulares, determine o que se pede para cada caixa. Considere 1 polegada = 2,54 cm.

a) As áreas que elas ocupam sobre a mesa.

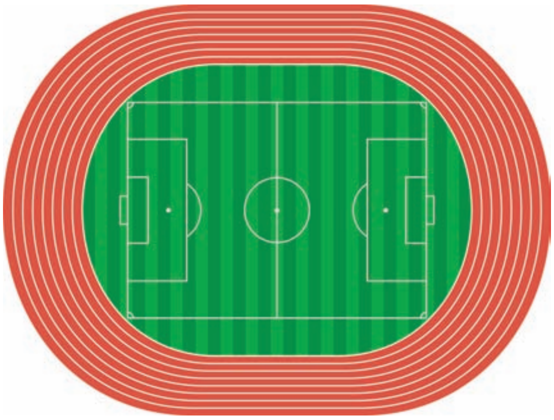
b) As medidas dos apótemas das tampas.

c) As medidas dos ângulos centrais das tampas.

9. Paulo desenhou um quadrado de 16 cm de lado inscrito em uma circunferência. Mariana desenhou um triângulo equilátero inscrito na mesma circunferência. Quanto mede o lado do triângulo que Mariana desenhou?

Circunferências

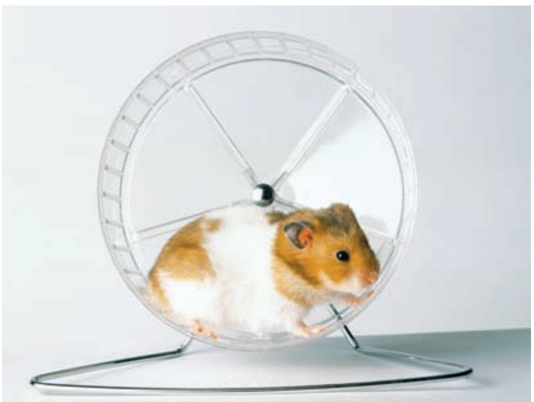
10. A figura abaixo ilustra uma pista de atletismo com 8 pistas de 1,3 m de largura cada uma, com um campo no seu interior. As extremidades da pista são semicirculares, com raio medindo 46,7 m. Os trechos retos da pista externa medem 55 m de comprimento.



Yuliyan Velchev/Shutterstock.com

Qual será a distância percorrida, quando uma pessoa der uma volta completa na pista mais externa?

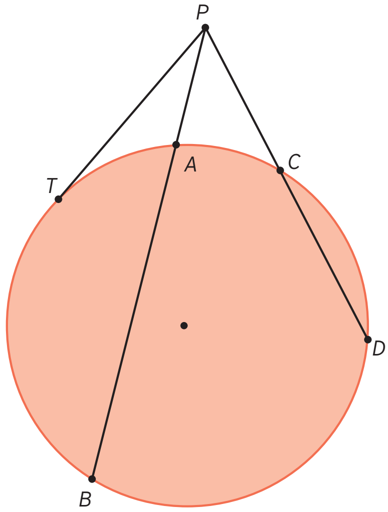
11. A figura abaixo mostra uma roda utilizada por *hamsters* para se exercitarem.



Getty Images/Dorling Kindersley

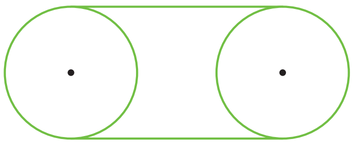
A roda tem 0,20 m de diâmetro. O roedor faz a roda girar 1000 vezes por dia. Qual é a distância percorrida por esse animal diariamente?

12. Uma mulher gostaria de pendurar um quadro circular. Como o quadro era pesado e o barbante de que ela dispunha não era muito resistente, resolveu usar 3 pedaços de barbante para pendurar o quadro. Os comprimentos dos pedaços de barbante eram PT, PB e PD. Na figura, o ponto T é ponto de tangência da circunferência.



Se $PC = 4$ cm, $PD = 6$ cm e $PA = 3$ cm, determine as medidas de PB e PT.

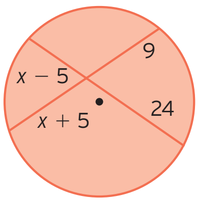
13. Duas polias de raios iguais a 16 cm são ligadas por uma correia.



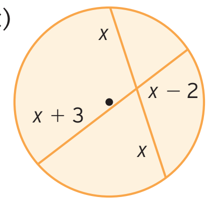
Calcule o comprimento aproximado da correia, sabendo que a distância entre os centros das polias é 30 cm. (Use $\pi = 3{,}14$.)

14. Determine o valor da incógnita x em cada item.

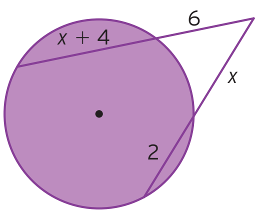
a)



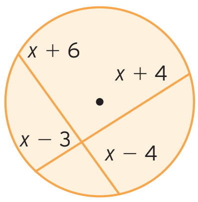
c)



b)

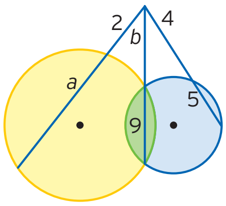


d)

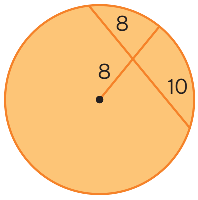


15. Calcule a distância aproximada, em metros, percorrida por um pneu de 900 mm de diâmetro, ao dar uma volta completa.

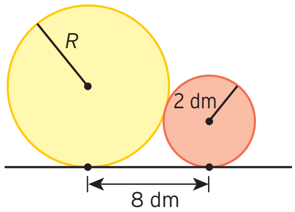
16. Determine os valores das incógnitas *a* e *b*.



17. Determine o raio do círculo mostrado na figura abaixo.



18. Dois pneus de um trator estão em pé, encostados um no outro, em uma superfície plana, como mostra a figura.



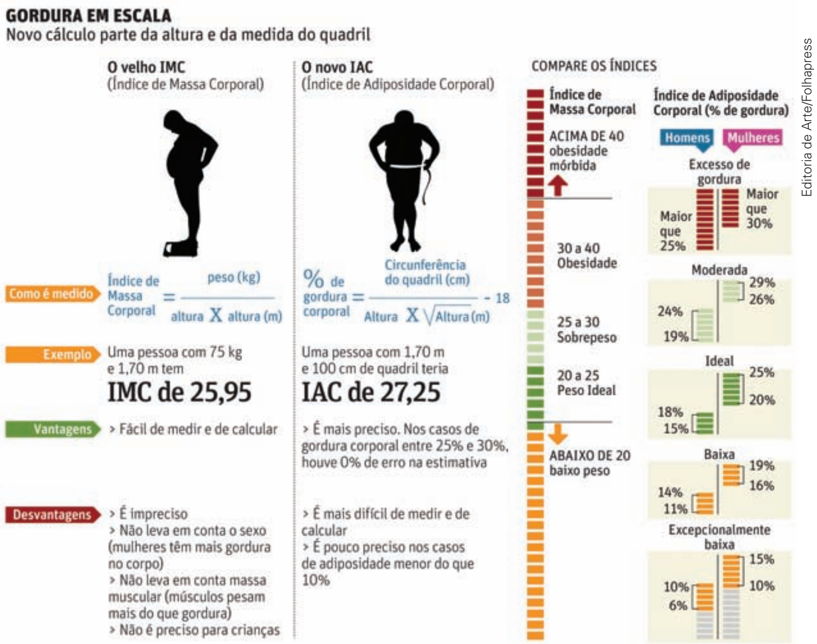
Considerando as medidas indicadas, calcule o diâmetro do pneu maior.

19. Recentemente, um novo cálculo para medir o grau de magreza ou obesidade de uma pessoa foi apresentado à comunidade científica. Trata-se do IAC (índice de Adiposidade Corporal) que deve substituir o IMC (Índice de Massa Corporal). Segundo os especialistas, o IAC é mais preciso do que o IMC.

O IMC é calculado pela equação:

$$\text{IMC} = \frac{\text{massa (kg)}}{\text{altura (m)} \times \text{altura (m)}}$$

E o cálculo do IAC é dado por % de gordura corporal: $\text{IAC} = \dfrac{\text{circunferência do quadril (cm)}}{\text{altura (m)} \times \sqrt{\text{altura (m)}}} - 18$



Fonte de pesquisa: *FSP* – cotidiano – 4-3-2011.

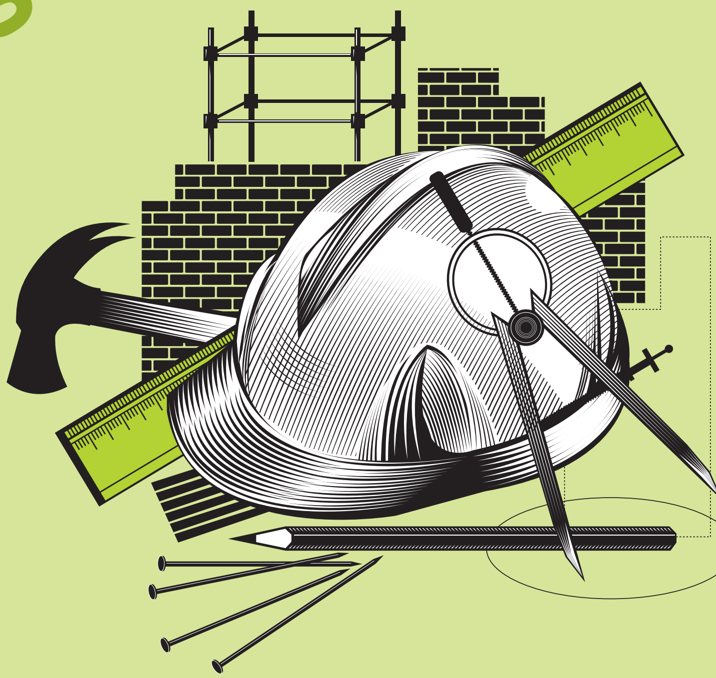
Qual seria a classificação de um homem com 72 kg, 1,70 m de altura e 98 cm de circunferência do quadril utilizando os dois critérios?

Para Viver Juntos

9 Matemática

ENSINO FUNDAMENTAL 9º ano

Resolução comentada



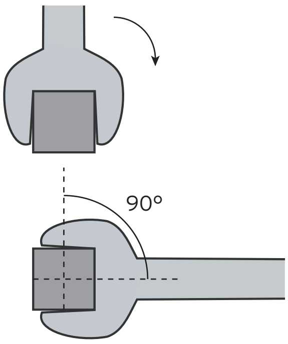
Samuel Casal

Este material é um complemento da obra **Matemática 9 – Para Viver Juntos**. Reprodução permitida somente para uso escolar. Venda proibida.

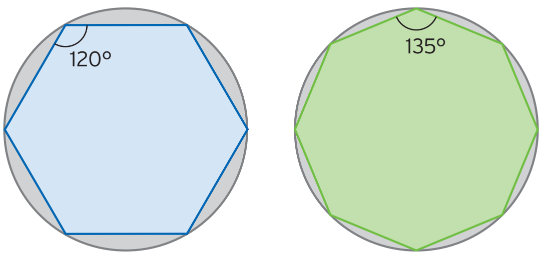
Polígonos

1. É importante verificar a necessidade de a figura que representa a cabeça do parafuso ter lados paralelos para facilitar o encaixe da chave. Assim, o número de lados deve ser par. Portanto, com 4, 6 ou 8 lados.

Para poder encaixar em parafusos com cabeça quadrada (com 4 lados), as chaves devem ser giradas em 90° (ângulo central). Como, em geral, os parafusos são colocados em lugares apertados, o ângulo de rotação pode ser um problema.

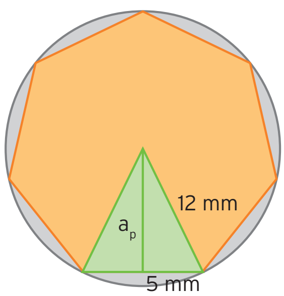


No caso do parafuso com 8 lados, a chave deve ser girada em 45°. Mas pode-se verificar pela ilustração abaixo que uma figura com 8 lados (ângulo interno de 135°) está mais próxima de uma circunferência do que uma figura com 6 lados (ângulo interno de 120°).



Como as chaves de aperto sempre têm uma folga, a tendência delas é sempre arredondar a cabeça do parafuso (espanar a cabeça).

2. A moeda de 25 centavos tem diâmetro de, aproximadamente, 24 mm, e o polígono inscrito na moeda é um heptágono com lados de 10 mm. Ligando o centro da moeda com dois vértices consecutivos, formamos um triângulo isósceles no qual a base é o lado do heptágono e cuja altura é o apótema do heptágono.



Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$(a_p)^2 + 5^2 = 12^2 \Rightarrow a_p \cong 10{,}9$

Portanto, o apótema do heptágono mede 10,9 mm.

3. Um hexágono regular é composto de seis triângulos equiláteros e seu apótema é a altura desses triângulos, ou seja, $3\sqrt{3}$ cm.

Logo, a área do hexágono regular é:

$$6 \cdot \frac{3 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 27\sqrt{3}$$

O hexágono tem $27\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ de área.

4. Temos:

$$ap = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

$$12 = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

$$r = 12\sqrt{2}$$

Logo:

$$l = r\sqrt{2} = 12\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 24$$

Então, o perímetro do quadrado é:

$4 \cdot 24$ cm $= 96$ cm

5. a) $l = r\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$

O lado do quadrado é $18\sqrt{2}$ cm.

b) $l = r\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$

O lado do triângulo equilátero é $18\sqrt{3}$ cm.

c) $l = r = 18$

O lado do hexágono regular é 18 cm.

6. a) $l = 2r = 2 \cdot 18 = 36$

O lado do quadrado é 36 cm.

b) Como o triângulo está circunscrito à circunferência, sua altura é $3r$, ou seja, 54 cm. Usando a relação da altura do triângulo equilátero, temos:

$$54 = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

$$l = \frac{108}{\sqrt{3}} = 36\sqrt{3}$$

O lado do triângulo é $36\sqrt{3}$ cm.

c) Como o hexágono regular é composto de seis triângulos equiláteros, o raio da circunferência se relaciona com o lado do hexágono pela equação a seguir.

$$\frac{l\sqrt{3}}{2} = r$$

$$\frac{l\sqrt{3}}{2} = 18$$

$$l = \frac{36}{\sqrt{3}} = 12\sqrt{3}$$

O lado do hexágono regular é $12\sqrt{3}$ cm.

7. Pela figura, e denominando r o raio da tampa, podemos observar que o comprimento da caixa é $6r$, e sua largura, $2r$; logo:

$2 \cdot (2r + 6r) = 48$

$16r = 48$

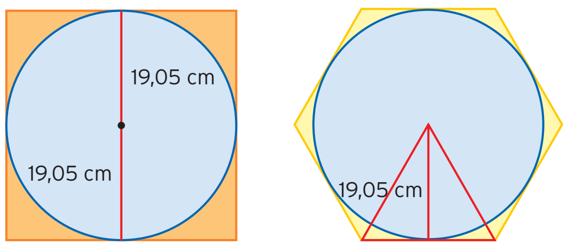
$r = 3$

O raio de cada círculo é 3 cm, então a sua área será: $\pi r^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$

A área que corresponde a uma tampa da lata de tinta é 9π cm².

8. Se 1 polegada corresponde a 2,54 cm, 15 polegadas correspondem a 38,1 cm, e o raio da *pizza* será de 19,05 cm.

A primeira figura representa uma *pizza* dentro de uma caixa com tampa quadrangular. A segunda, dentro de uma caixa com tampa hexagonal. Como o exercício pede para considerar as tampas como polígonos regulares, temos, portanto, um quadrado e um hexágono regular.



Cálculo da medida do lado do hexágono:

$H = \dfrac{L\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 19{,}05 = \dfrac{L\sqrt{3}}{2} \Rightarrow L \cong 22$ cm

Cálculo da medida do lado do quadrado:

$D = L \Rightarrow L = 38{,}1$ cm

a) As áreas que elas ocupam sobre a mesa.

$A_{hex.} = 6 \cdot \dfrac{L^2\sqrt{3}}{4} \cong 1256$ cm²

$A_{quad.} = L^2 \cong 1452$ cm²

b) A medida dos apótemas das tampas.

Hexágono: $a_p = 19{,}05$ cm

Quadrado: $a_p = 19{,}05$ cm

c) A medida dos ângulos centrais das tampas.

Hexágono: $a_c = \dfrac{360°}{6} = 60°$

Quadrado: $a_c = \dfrac{360°}{4} = 90°$

9. Primeiro, vamos determinar o raio da circunferência.

$l = r\sqrt{2}$

$16 = r\sqrt{2}$

$r = 8\sqrt{2}$

Como o raio é $8\sqrt{2}$ cm, o lado do triângulo equilátero é dado por:

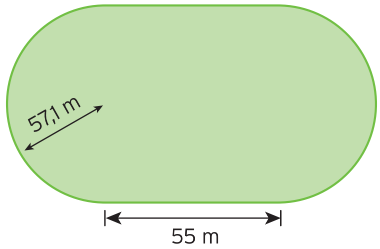
$l = r\sqrt{3}$

$l = 8\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 8\sqrt{6}$

O triângulo que Mariana desenhou tinha $8\sqrt{6}$ cm de lado.

Circunferência

10. O raio da pista mais externa será 46,7 m mais a largura de 8 pistas, 10,4 m ($8 \cdot 1{,}3 = 10{,}4$), ou seja, 57,1 m. Assim, como as duas extremidades formam uma circunferência, o seu comprimento será de:



$C_{circunferência} = 2\pi R$

Tomando $\pi = 3{,}14$, temos:

$C_{circunferência} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 57{,}1 \cong 358{,}6$

Adicionando 110 m dos trechos retos, temos:

$C_{total} = 358{,}6 + 110 = 468{,}6$

A distância percorrida em uma volta pela parte externa da pista será 468,6 m.

11. Em uma volta, o *hamster* percorre:

$C = 2\pi R = 2 \cdot 3{,}14 \cdot \dfrac{0{,}20}{2} = 0{,}628$

Logo, mil voltas correspondem a 628 m.

12. Da relação entre secantes, temos:

$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

$3 \cdot PB = 4 \cdot 6$

$PB = 8$

Da relação entre secante e tangente, temos:

$(PT)^2 = PA \cdot PB$

$PT = \sqrt{3} \cdot 8 = 2\sqrt{6}$

Portanto, $PB = 8$ cm e $PT = 2\sqrt{6}$ cm.

13. Para determinar o comprimento aproximado da correia é necessário calcular o comprimento do arco de duas semicircunferências, ou seja, de uma circunferência.

$2 \cdot \pi \cdot 16 = 32 \cdot 3{,}14 = 100{,}48$

O comprimento da correia é:

100,48 cm + $2 \cdot 30$ cm = 160,48 cm

14. a) Pela relação entre cordas, temos:

$(x - 5) \cdot 24 = 9 \cdot (x + 5)$

$24x - 120 = 9x + 45$

$15x = 165$

$x = \dfrac{165}{15} = 11$

b) Pela relação entre secantes, temos:

$x \cdot (2 + x) = 6 \cdot (x + 4 + 6)$

$2x + x^2 = 6x + 60$

$x^2 - 4x - 60 = 0$

$x = \dfrac{4 \pm \sqrt{256}}{2} = \dfrac{4 \pm 16}{2}$

Assim: $x = 10$ ou $x = -6$

Como não podemos ter uma medida de comprimento negativa, $x = 10$.

c) Pela relação entre cordas, temos:

$(x - 2) \cdot (x + 3) = x \cdot x$

$x^2 + x - 6 = x^2$

$x = 6$

d) Pela relação entre cordas, temos:

$(x - 3) \cdot (x + 4) = (x + 6) \cdot (x - 4)$

$x^2 + x - 12 = x^2 + 2x - 24$

$x = 12$

15. Para determinar a distância percorrida por uma volta do pneu, é necessário calcular o comprimento da circunferência desse pneu, tomando $\pi = 3{,}14$. Logo:

$C = 2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 450 = 2\,826$

O pneu percorreu 2 826 mm, que é aproximadamente 2,83 m.

16. Inicialmente, vamos determinar o valor da incógnita b. Pela relação entre secantes, temos:

$B \cdot (b + 9) = 4 \cdot (4 + 5)$

$b^2 + 9b = 36$

$b^2 + 9b - 36 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau:

$$b = \frac{-9 \pm \sqrt{225}}{2} = \frac{-9 \pm 15}{2}$$

Assim: $b = 3$ ou $b = -12$

Como b é um comprimento, então $b = 3$.

Para determinar a, aplicamos novamente a relação entre secantes.

$2 \cdot (2 + a) = b \cdot (9 + b)$

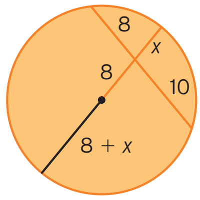
$4 + 2a = 3 \cdot (9 + 3)$

$4 + 2a = 36$

$2a = 32$

$a = 16$

17. Veja a figura a seguir:



Denominamos x a parte que falta do raio e, para aplicarmos a relação entre cordas, completamos o diâmetro do círculo.

$(8 + 8 + x) \cdot x = 8 \cdot 10$

$x^2 + 16x - 80 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau:

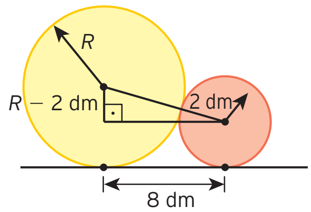
$$x = \frac{-16 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{-16 \pm 24}{2}$$

Assim: $x = 4$ ou $x = -20$

Como x é um comprimento, então $x = 4$.

Portanto, o raio do círculo é $8 + x = 8 + 4 = 12$.

18. Veja a figura a seguir:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo da figura, temos:

$(R - 2)^2 + 8^2 = (R + 2)^2$

$R^2 - 4R + 4 + 64 = R^2 + 4R + 4$

$8R = 64$

$R = 8$

Portanto, R tem 8 dm; logo, o diâmetro da roda maior do trator é 16 dm.

19. $\text{IMC} = \dfrac{72}{(1{,}70)^2} = 24{,}91$ (sobrepeso)

$\text{IAC} = \dfrac{98}{1{,}7 \cdot \sqrt{1{,}7}} - 18 = 26{,}21$ (excesso de gordura)