Para Viver Juntos

9

Matemática

ENSINO FUNDAMENTAL 9º ano

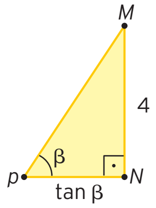
Atividades complementares

Samuel Casal

sm

Razões trigonométricas no triângulo retângulo

1. Considere o triângulo *MNP*, no qual as medidas são dadas em cm.



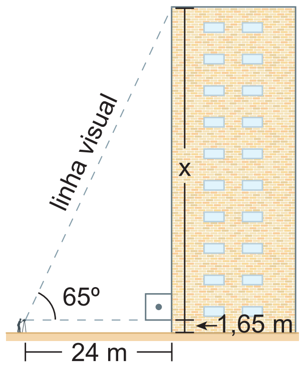
a) Determine o perímetro do triângulo.
b) Determine a área do triângulo.

2. O teodolito é um instrumento óptico que mede ângulos verticais e horizontais. Ele é utilizado para medir distâncias inacessíveis e, por isso, é bastante empregado, por exemplo, por engenheiros.

Celeborn/Shutterstock.com

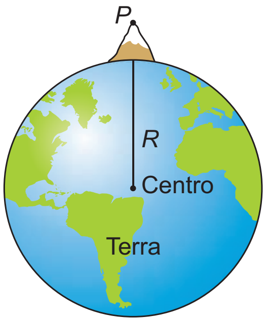
Funcionário utilizando um teodolito eletrônico.

Foi pedido a um arquiteto que reformasse a fachada de um prédio e para isso era preciso saber a altura exata do edifício. Assim, ele pediu para um de seus funcionários instalar um teodolito a 24 m do imóvel e mirar em seu topo. Foi obtido um ângulo de 65° com a horizontal.



Se o teodolito está instalado a 1,65 m de altura, com o auxílio da tabela do capítulo 6 determine qual é a altura do prédio.

3. Suponha que você esteja no pico de uma montanha com um teodolito em mãos. O que você poderia fazer para determinar o raio *R* da Terra, sabendo que a montanha tem altura *H*?

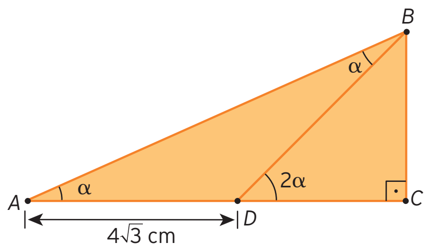


4. Em um parque, um escorregador é acoplado a um pequeno mirante, e o acesso a ele se dá através de uma rampa de madeira, como mostra a figura abaixo.

g215/Shutterstock.com

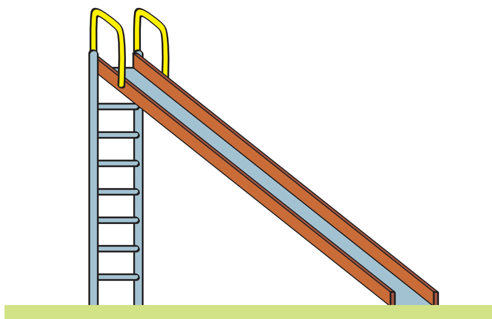
O escorregador tem 2,61 m e forma 50° com a horizontal. Determine o comprimento da rampa de corda sabendo que a sua inclinação é 40°. Consulte a tabela de relações trigonométricas no capítulo 6.

5. A área do triângulo *ABD*, na figura abaixo, é 12 cm^2.

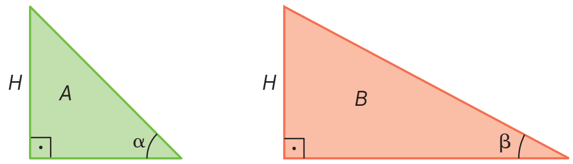


Utilize as relações trigonométricas e calcule a área do triângulo *BCD*.

6. Veja o escorregador mostrado a seguir.



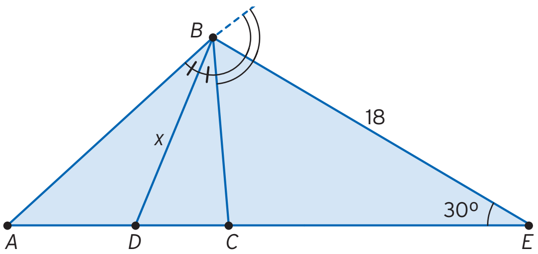
Abaixo, tem-se o esboço do perfil de dois tipos de escorregadores *A* e *B*, com a mesma altura *H*.



a) A inclinação de uma reta está relacionada com o ângulo entre a reta e a horizontal. Qual ângulo está associado à inclinação da rampa *A*? E à rampa *B*?

b) Das duas rampas, qual tem maior inclinação? Justifique.

7. Na figura, $\overline{BD}$ é bissetriz interna do triângulo *ABC* e $\overline{BE}$ é a bissetriz externa, ambas relativas ao vértice *B*.



Determine o valor de *x*.

8. A velocidade de decolagem de um avião depende de vários fatores, entre eles: temperatura do ar, tipo de avião, peso do avião, etc. Determinado avião decola com uma velocidade de 90 m/s com uma inclinação de 20°.

Getty Images/Flickr RF

Supondo que a velocidade e a inclinação se mantenham constantes durante essa análise, após quanto tempo o avião atingirá 11 000 m de altura?

Relações entre as razões trigonométricas

9. Utilizando as relações trigonométricas, determine o valor de *x* em cada item:

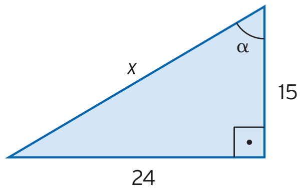
a) sen 55° = 0,819, cos 55° = 0,574 e tan 55° = *x*

b) sen 20° = *x*, cos 20° = 0,940 e tan 20° = 0,364

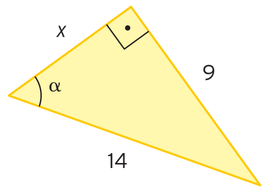
c) sen 67° = 0,921, cos 67° = *x* e tan 67° = 2,356

10. Com o auxílio da tabela trigonométrica do capítulo 6 e sem utilizar o teorema de Pitágoras, determine o ângulo em destaque e calcule o valor aproximado de *x* em cada item:

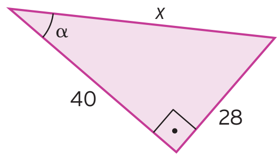
a)



b)

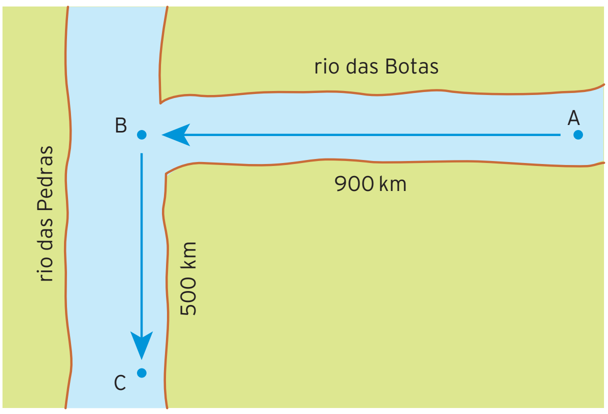


c)



11. Um jardineiro construiu um jardim de rosas no formato de um triângulo retângulo. Se a hipotenusa desse triângulo mede 15 m e um dos outros dois ângulos mede 53°, com o auxílio da tabela trigonométrica, determine o perímetro e a área desse jardim.

12. Em determinada região, o rio das Botas deságua no rio das Pedras. O rio das Botas tem uma declividade média de 60 cm/km e o rio das Pedras, 90 cm/km. No rio das Botas, a distância entre os pontos *A* e *B* é 900 km, e no rio das Pedras, a distância entre os pontos *B* e *C* é 500 km.



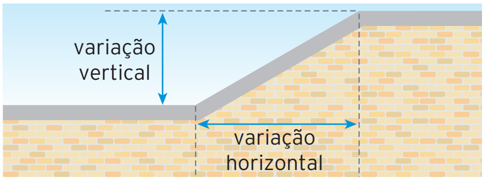
Esses três pontos formam entre si um triângulo retângulo, com o ângulo reto em *B*.

a) O ponto *A* está a 1 450 m acima do nível do mar. Determine a quantos metros acima do nível do mar estão os pontos *B* e *C*.

b) Utilizando as relações trigonométricas e com o auxílio da tabela do capítulo 6 determine a distância entre os pontos *A* e *C*, e os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$.

13. A imagem a seguir representa o símbolo internacional de acesso, que anuncia que determinado local é acessível a cadeirantes.

Para que os cadeirantes tenham acesso adequado, as rampas de acesso devem ter declividade máxima de 5%. A declividade de uma reta é a razão entre a variação vertical e a variação horizontal da reta.



Recomenda-se que, para rampas com até 3% de declividade, exista uma área de descanso plana a cada 60 m de piso e a cada 30 m em rampas com declividade de 3% a 5%.

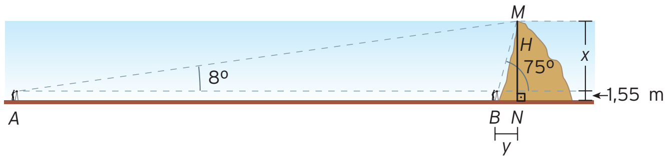
a) Consultando a tabela do capítulo 6, determine aproximadamente o ângulo formado com a horizontal por rampas de 3% e 5% de declividade.

b) Determine a variação vertical máxima obtida por rampas de 3% e de 5% de declividade, sem que haja a necessidade de áreas de descanso.

c) Determine a variação vertical máxima obtida por rampas de 3% e de 5% de declividade, considerando que haja uma área de descanso.

14. Para projetar uma via de acesso a um morro, é necessário conhecer sua altura. Para isso, um operador de teodolito posicionou o aparelho no ponto *A*, mirou o ponto mais alto do morro, *M*, e obteve um ângulo de 8° com relação à horizontal.

Em seguida, ele caminhou 250 m em direção ao morro, até o ponto *B*, e mirou novamente o topo do morro obtendo um ângulo de 75° com a horizontal.



Considerando que o teodolito está a 1,55 m de altura, determine o que se pede.

a) Consultando a tabela do capítulo 6, determine aproximadamente a altura do morro.

b) Por que foi necessário fazer duas medições em vez de apenas uma?

Para Viver Juntos

9

Matemática

ENSINO FUNDAMENTAL 9º ano

Resolução comentada

Samuel Casal

Este material é um complemento da obra **Matemática 9 – Para Viver Juntos**. Reprodução permitida somente para uso escolar. Venda proibida.

sm

Razões trigonométricas no triângulo retângulo

1. a) $\tan \beta = \dfrac{4}{\tan \beta} \Rightarrow (\tan \beta)^2 = 4$

$\tan \beta = 2$

Agora, aplicando o teorema de Pitágoras, conseguimos determinar o lado MP do triângulo.

$(MP)^2 = (PN)^2 + (MN)^2 = 2^2 + 4^2 = 20$

$MP = 2\sqrt{5}$

Cálculo do perímetro P do triângulo:

$P = 2 + 4 + 2\sqrt{5} = 6 + 2\sqrt{5}$

Portanto, o perímetro do triângulo é

$P = (6 + 2\sqrt{5})$ cm

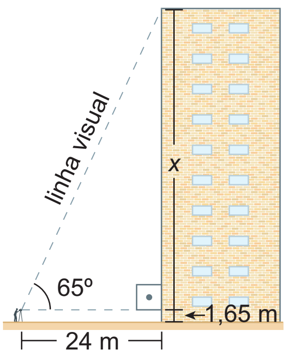
b) Como o triângulo é retângulo, a sua área é calculada pela multiplicação dos seus catetos dividido por 2: $\dfrac{2 \cdot 4}{2} = 4$

Portanto, a área do triângulo é $A = 4$ cm².

2. Pela tabela, temos tan 65° = 2,145; logo:

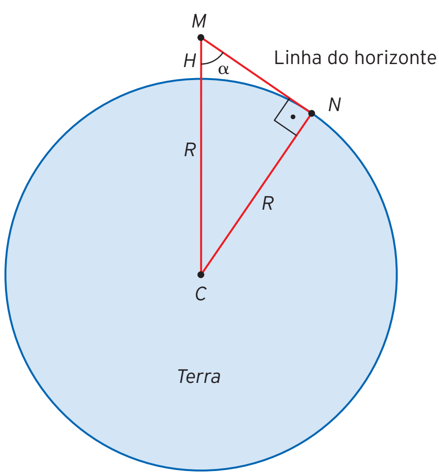
$\tan 65° = \dfrac{x}{24} \Rightarrow x = 24 \cdot 2{,}145 = 51{,}48$

$x = 51{,}48$ m



Portanto, a altura do prédio é 53,13 m, pois 51,48 + 1,65 = 53,13.

3. Com o teodolito podemos medir o ângulo entre a linha do horizonte e a vertical (α).



Assim:

$\text{sen}\,\alpha = \dfrac{R}{R + H}$

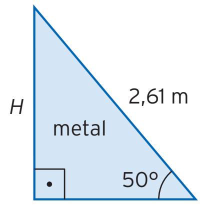
$R = (H + R) \cdot \text{sen}\,\alpha$

$R - R \cdot \text{sen}\,\alpha = H \cdot \text{sen}\,\alpha$

$R \cdot (1 - \text{sen}\,\alpha) = H \cdot \text{sen}\,\alpha$

$R = \dfrac{H \cdot \text{sen}\,\alpha}{1 - \text{sen}\,\alpha}$

4. De acordo com o enunciado, a altura do escorregador será:

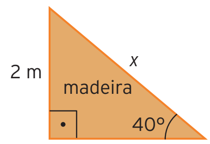


$\text{sen}\,50° = \dfrac{H}{2{,}61}$

sen 50° é aproximadamente 0,766. Assim, a altura será:

$H = 2{,}61 \cdot 0{,}766 = 2$ m

Como a rampa de madeira atinge a mesma altura, aproximadamente 2 m, o comprimento pode ser calculado.



sen 40° é aproximadamente 0,643.

$\text{sen}\,40° = \dfrac{2}{x}$

$x = \dfrac{2}{0{,}643} = 3{,}110$

Logo, o comprimento da rampa é aproximadamente 3,11 m.

5. Primeiro, vamos determinar a medida de BC, que é a altura do triângulo ABD.

$12 = \dfrac{BC \cdot AD}{2} = \dfrac{BC \cdot 4\sqrt{3}}{2}$

$BC = \dfrac{24}{4\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$

Agora, vamos definir α.

$\text{sen}\,2\alpha = \dfrac{BC}{BD}$, como BD é igual a AD, pois o triângulo BCD é isósceles de base AB, então:

$\text{sen}\,2\alpha = \dfrac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \Rightarrow 2\alpha = 30°$

Aplicando uma das relações trigonométricas:

$\cos 30° = \dfrac{DC}{BD}$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{DC}{4\sqrt{3}} \Rightarrow DC = 6$

Portanto, a área do triângulo é, em cm²:

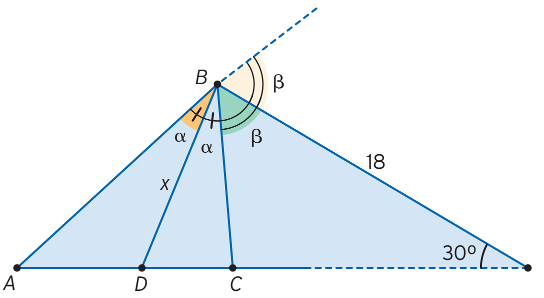
$\dfrac{BC \cdot DC}{2} = \dfrac{2\sqrt{3} \cdot 6}{2} = 6\sqrt{3}$

6. a) Inclinação da rampa A: α

Inclinação da rampa B: β

b) As duas rampas têm a mesma altura. Verifica-se que a projeção vertical da rampa *B* é maior do que a projeção vertical da rampa *A*. Quanto maior a tangente da inclinação, maior é a inclinação. Logo, a rampa *A* tem maior inclinação.

7. $2\alpha + 2\beta = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 90°$

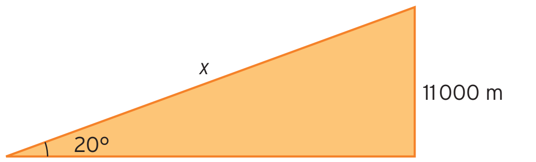


O triângulo *BED* é retângulo em *B* (pois, $\alpha + \beta = 90°$). Aplicando uma das relações trigonométricas, temos:

$$\text{tg } 30° = \frac{x}{18} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{18}$$

$$x = 6\sqrt{3}$$

8. Para atingir 11 000 m, o avião deverá percorrer:



$$\text{sen } 20° = \frac{11\,000}{x}$$

$$\text{sen } 20° \cong 0{,}342$$

$$x \cong \frac{11\,000}{0{,}342} \cong 32\,164$$

Como a velocidade do avião é 90 m/s, e lembrando que a relação de velocidade constante é $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, o tempo necessário para percorrer esse trecho será:

$$\Delta t \cong \frac{32\,164}{90} \cong 357{,}4$$

Assim, o avião atingirá 11 000 m em aproximadamente 357,4 segundos, o que corresponde a aproximadamente 6 minutos.

Relações entre as razões trigonométricas

9. a) $\tan 55° = \frac{\text{sen } 55°}{\cos 55°} = \frac{0{,}819}{0{,}574} \cong 1{,}427$

b) $\tan 20° = \frac{\text{sen } 20°}{\cos 20°} \Rightarrow \text{sen } 20° =$

$= (\tan 20°) \cdot (\cos 20°)$

$\text{sen } 20° = (0{,}364) \cdot (0{,}940) \cong 0{,}342$

c) $\tan 67° = \frac{\text{sen } 67°}{\cos 67°} \Rightarrow \cos 67° = \frac{\text{sen } 67°}{\tan 67°} =$

$= \frac{0{,}921}{2{,}356} \cong 0{,}391$

10. a) Primeiro, vamos determinar o valor de α.

$$\tan \alpha = \frac{24}{15} = 1{,}6 \Rightarrow \alpha = 58°$$

Logo o valor de *x* será:

$$\cos \alpha = \frac{15}{x} \Rightarrow x = \frac{15}{\cos 58°} = \frac{15}{0{,}530} = 28{,}3$$

b) Primeiro, vamos determinar o valor de α.

$$\text{sen } \alpha = \frac{9}{14} \cong 0{,}643 \Rightarrow \alpha = 40°$$

Logo, o valor de *x* será:

$$\cos \alpha = \frac{x}{14} \Rightarrow x = 14 \cdot \cos 40°$$

$$x = 14 \cdot 0{,}766 = 10{,}724$$

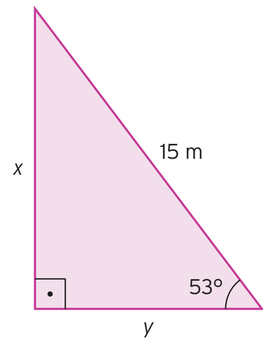
c) Primeiro, vamos determinar o valor de α.

$$\tan \alpha = \frac{28}{40} = 0{,}7 \Rightarrow \alpha = 35°$$

Logo, o valor de *x* será:

$$\cos \alpha = \frac{40}{x} \Rightarrow x = \frac{40}{\cos 35°} = \frac{40}{0{,}766} \cong 52{,}22$$

11. Utilizando as relações trigonométricas, temos:



$$\text{sen } 53° = \frac{x}{15} \Rightarrow x = 15 \cdot 0{,}799 \cong 12$$

$$\cos 53° = \frac{y}{15} \Rightarrow y = 15 \cdot 0{,}602 \cong 9$$

A área *A* do jardim será:

$$A = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{12 \cdot 9}{2} = 54$$

Portanto, a área do jardim é 54 m^2 e o seu perímetro é 15 m + 12 m + 9 m, ou seja, 36 m.

12. a) rio das Botas:

$$\frac{60 \text{ cm}}{x} = \frac{1 \text{ km}}{900\text{km}} \Rightarrow x = 54000 \text{ cm} = 540 \text{ m}$$

Portanto, se *A* está a 1450 m acima do nível do mar, o ponto *B* estará 540 m mais baixo, ou seja, a 910 m.

rio das Pedras:

$$\frac{90 \text{ cm}}{x} = \frac{1 \text{ km}}{500 \text{ km}} \Rightarrow x = 45\,000 \text{ cm} = 450 \text{ m}$$

Portanto, se *B* está a 910 m acima do nível do mar, o ponto *C* estará 450 m mais baixo, ou seja, a 460 m.

b) Primeiro, vamos determinar o ângulo $\hat{C}$:

$$\tan \hat{C} = \frac{900}{500} = 1{,}8 \Rightarrow \hat{C} = 61°$$

Então, a distância entre A e C é dada por:

$$\cos 61° = \frac{BC}{AC} \Rightarrow 0{,}485 = \frac{500}{AC}$$

$$AC = \frac{500}{0{,}485} \cong 1\,031$$

Portanto, a distância entre os pontos A e C é aproximadamente 1031 km.

Agora, vamos determinar sen 61° e cos 61°.

Pela tabela trigonométrica, sen 61° = 0,875 e cos 61° = 0,485.

Vamos determinar agora os valores de sen, cos e tan do ângulo $\hat{A}$, que é 29°, pois

$180° - 90° - 61° = 29°$.

Pela tabela trigonométrica, sen 29° = 0,485, cos 29° = 0,875 e tan 29° = 0,554.

13. a) A razão entre a variação vertical e horizontal corresponde à tangente do ângulo.

$$\text{tg } \alpha = 0{,}03 \Rightarrow \alpha \cong 1{,}7°$$

$$\text{tg } \beta = 0{,}05 \Rightarrow \beta \cong 2{,}8°$$

b) Rampas com 3% de declividade:

$$\text{sen } 1{,}7° = \frac{H}{60}$$

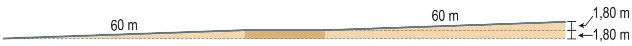
$$H = 60 \cdot \text{sen } 1{,}7° \cong 60 \cdot 0{,}03 = 1{,}8$$

Rampas com 5% de declividade:

$$\text{sen } 2{,}8° = \frac{H}{30}$$

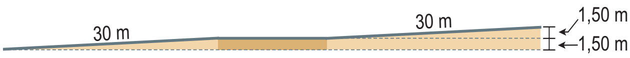
$$H = \text{sen } 2{,}8 \cdot 30 \cong 0{,}05 \cdot 30 = 1{,}5 \text{ m}$$

c) Rampas com 3% de declividade:



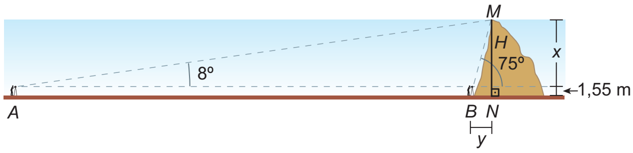
Variação vertical máxima: 3,60 m

Rampas com 5% de declividade:



Variação vertical máxima: 3,00 m

14. a) Temos o seguinte sistema:



$$\begin{cases} \text{tg } 75° = \dfrac{x}{y} \Rightarrow x = 3{,}732y \\ \text{tg } 8° = \dfrac{x}{y + 250} \Rightarrow x = 0{,}14(y + 250) \end{cases}$$

Substituindo a 1ª equação na 2ª, temos:

$3{,}732y = 0{,}14(y + 250)$

$3{,}732y - 0{,}14y = 35$

$$y = \frac{35}{3{,}592} \cong 9{,}74$$

Substituindo y na 1ª equação, temos:

$x = 3{,}732 \cdot 9{,}74 \cong 36{,}35$

Agora, adicionamos x à altura do teodolito para calcular a altura do morro:

$h = 36{,}35 + 1{,}55 = 37{,}90$

Portanto, o morro tem aproximadamente 37,90 m de altura.

b) Porque não é possível determinar a distância do teodolito à projeção vertical do topo do morro, a qual, na figura, é indicada pelo segmento BN.