Para Viver Juntos

9

Matemática

ENSINO FUNDAMENTAL 9º ano

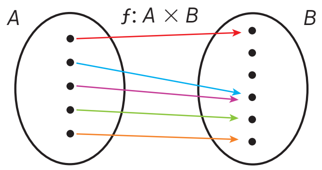
Atividades complementares

Samuel Casal

sm

Ideia intuitiva de função

1. Veja o seguinte diagrama de flechas.



Explique por que a relação mostrada pelo diagrama representa uma função. É provável que essa relação represente uma função do 1º ou do 2º grau? Justifique.

2. A função h é dada pela lei $h(x) = -3x^2 + x + 2$. Determine:

a) $h(0)$

b) $h\left(\frac{7}{3}\right)$

c) $h(-1)$

d) $h(3)$

3. Considere f uma função dada pela lei:

$$f(x) = 2^x - 3x$$

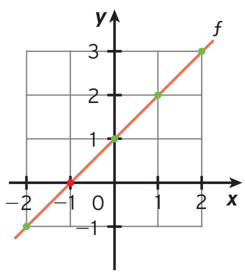
Calcule o valor da seguinte expressão:

$$2 \cdot f(4) - 5 \cdot f(3)$$

4. Considere os conjuntos $A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ e $B = \{11, m, 15, 17, n\}$. Para cada elemento de A há um elemento em B que corresponde ao seu dobro mais 3. Sendo m e n números reais, que valor eles podem assumir de modo que essa relação seja uma função?

Função constante e função afim

5. Observe o gráfico da função dada por $g(x) = mx + n$.

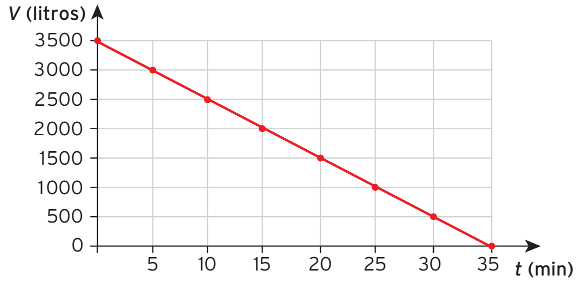


a) O que o valor circulado em vermelho representa?

b) E o circulado em verde?

c) Determine os valores de m e n da função.

6. Um reservatório está completamente cheio de água e tem capacidade para 3 500 litros. Para realizar a sua limpeza, o reservatório será esvaziado através de um registro instalado no fundo do reservatório. O gráfico a seguir mostra o volume de água dentro do reservatório em função do tempo.



a) Em quanto tempo o reservatório esvaziará?

b) Após a abertura do registro, em quanto tempo haverá metade do volume de água no reservatório?

c) Determine a vazão média de água, em litros por minuto, que sai pelo registro.

d) Escreva uma equação que relaciona o volume de água no reservatório em função do tempo.

e) Se V corresponde ao volume de água, em litros, dentro do reservatório, e t, ao tempo em minutos, complete as inequações abaixo com os valores mínimos e máximos dessas duas grandezas.

$$\_\_\_\_\_\_ < V < \_\_\_\_\_\_$$

$$\_\_\_\_\_\_ < t < \_\_\_\_\_\_$$

7. Um padeiro consegue fazer 200 pães por hora.

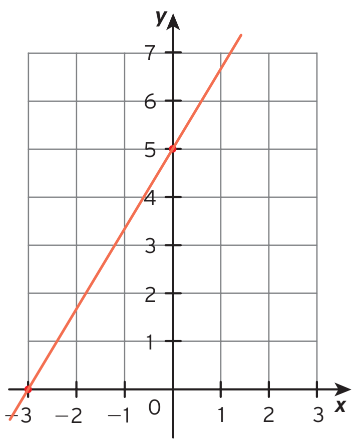
a) Escreva uma equação que represente o número de pães feitos por ele em função do tempo.

b) Quanto tempo o padeiro precisa para fazer 1200 pães?

c) Nessa padaria são vendidos, em média, 180 pães por hora. Os primeiros fregueses aparecem após 1 h de serviço do padeiro. Se um freguês aparecer logo que sair a quinta fornada e quiser comprar 300 pães, haverá pães suficientes?

d) Esboce o gráfico dessa função.

8. Veja o gráfico da função f e responda às questões abaixo.



a) A função é do primeiro ou do segundo grau? Por quê?

b) A função é crescente ou decrescente?

c) Qual é a intersecção em x e em y?

d) Para quais valores de x, tem-se $-x\ f(x) > 0$ e $f(x) < 0$?

e) Qual é a raiz da função?

9. O preço a ser pago por uma corrida de táxi é uma composição de uma parcela fixa (bandeirada) e uma parcela variável, que depende da distância percorrida. Um táxi da empresa *A* cobra R$ 3,50 pela bandeirada e R$ 0,70 pelo quilômetro rodado. Um táxi da empresa *B* cobra R$ 2,50 pela bandeirada e R$ 0,95 pelo quilômetro rodado.

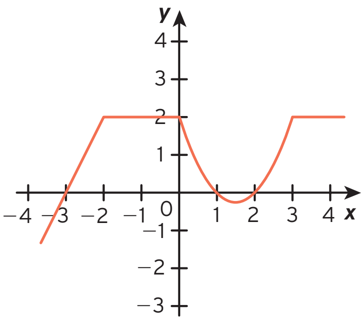
a) Uma pessoa deseja fazer uma viagem de 20 km. Qual opção é a mais barata: o táxi da empresa *A* ou da empresa *B*?

b) Desenhe os gráficos das duas funções.

10. Paulo pretende construir um galinheiro na forma de um retângulo com 34 m de tela de arame. A fim de obter a maior área possível, Paulo utiliza uma parte do muro do seu quintal, precisando assim cercar apenas três lados do galinheiro.

Determine a área do galinheiro em função do seu maior lado.

11. Considere a função f, cujo gráfico está representado a seguir.



a) Para quais valores de x a função f assume valores negativos?

b) Para quais valores de x a função f assume valores positivos?

c) Para quais valores de x a função f é constante?

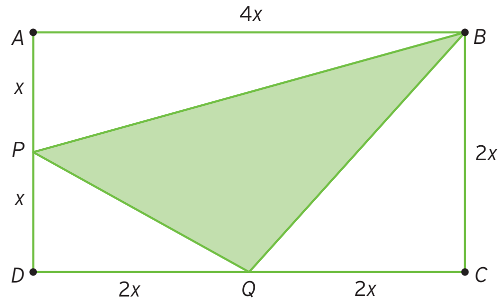
12. Determine os valores reais de k para os quais a função dada por $f(x) = (k - 2)x + 3k$ é crescente.

13. Considere um triângulo *ABC*, cujos vértices têm coordenadas cartesianas *A*(3, 1), *B*(7, 1) e *C*(1, 5).

a) Represente esse triângulo no plano cartesiano.

b) Calcule o valor da área desse triângulo.

14. Considere a figura a seguir, na qual *ABCD* é um retângulo, *P* é ponto médio de *AD*, *Q* é ponto médio de *CD* e x é um número real positivo.



a) Calcule, em função de x, as áreas dos triângulos retângulos *ABP*, *DPQ* e *BCQ*.

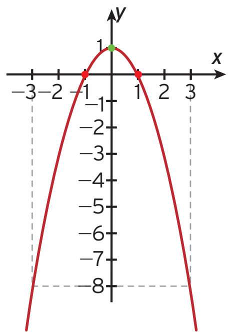
b) Seja f a função que associa, para cada x, a área do triângulo *BPQ*. Escreva a lei da função f.

c) Calcule $f(3)$ e $f(\sqrt{5})$.

d) Determine x tal que $f(x) = 36$.

Função quadrática

15. Observe o gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$, abaixo:



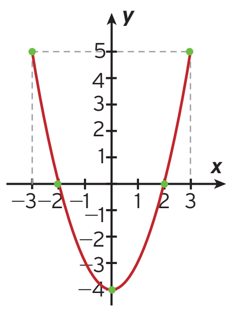
a) Que tipo de curva representa o gráfico da função f?

b) O que os valores circulados em vermelho representam?

c) E o circulado em verde?

d) Determine os valores de a, b e c da função.

16. Observe o gráfico da função f e responda às questões abaixo.



a) A função é do primeiro ou do segundo grau? Por quê?

b) Se o gráfico representa a lei $f(x) = ax^2 + bx + c$, o que se pode dizer a respeito de a e de c?

c) Quais são as raízes da função?

d) Determine o vértice da parábola e verifique se é ponto de máximo ou de mínimo.

e) Determine os valores de a, b e c.

f) Faça o estudo dos sinais da função.

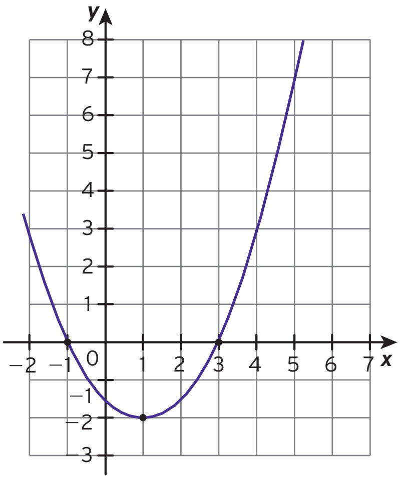
g) O discriminante da equação $ax^2 + bx + c = 0$ é maior do que, menor do que ou igual a zero? Por quê?

h) Determine $f(10)$.

i) O que se pode dizer a respeito de $f(-20)$ e $f(20)$? Justifique.

j) A função é crescente para quais valores de x?

17. Parte do gráfico de uma função f do 2º grau está representada abaixo.



a) Calcule o valor de $f(5)$?

b) Calcule o valor de $f(1)$?

c) Determine todos os valores de x para os quais se tem $f(x) = 0$.

18. Identifique quais afirmações são corretas e corrija as falsas.

a) A concavidade do gráfico de uma função quadrática é para cima quando $a < 0$.

b) Uma função quadrática tem valor máximo quando $a < 0$.

c) O vértice de uma função quadrática não intersecta o eixo das abscissas quando tem apenas uma raiz real.

d) Uma função quadrática com concavidade para baixo tem valor máximo.

19. O ponto V_1 é o vértice da parábola definida pela lei $f(x) = -x^2 - 6x - 9$ e o ponto V_2 é o vértice da parábola definida pela lei $g(x) = x^2 + 4$.

a) Determine os pontos V_1 e V_2.

b) Represente os pontos V_1 e V_2 no plano cartesiano.

20. Calcule todos os possíveis valores do número real m para os quais o gráfico de $f(x) = x^2 - mx + (2m - 3)$ intersecta o eixo das abscissas em um único ponto.

21. Encontre, se existirem, todas as raízes reais das seguintes funções do 2º grau.

a) $f(x) = x^2 - 9x + 14$

b) $g(x) = -x^2 - 6x - 8$

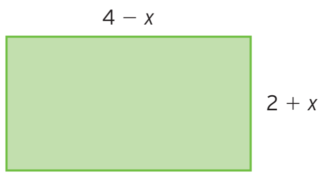
c) $h(x) = 12x^2 - x - 6$

d) $i(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{3}$

e) $j(x) = -2x^2 - 18x + 44$

f) $k(x) = 100x^2 + 103$

22. A figura abaixo mostra um retângulo e suas dimensões.



a) Determine o valor de x para que a área do retângulo seja máxima.

b) Calcule o valor da área máxima.

c) Na situação de área máxima, qual é a figura geométrica obtida?

Para Viver Juntos

9 Matemática

ENSINO FUNDAMENTAL 9º ano

Resolução comentada

Samuel Casal

sm

Ideia intuitiva de função

1. É uma função, pois todo valor do conjunto A se relaciona com um único valor do conjunto B.

É mais provável que essa relação represente uma função do 2º grau, pois dois valores do conjunto A se relacionam com um mesmo valor do conjunto B. Na função do 1º grau isso não ocorre.

2. a) $h(0) = -3(0^2) + 0 + 2 = 2$

b) $h\left(\frac{7}{3}\right) = -3\left(\frac{7}{3}\right)^2 + \frac{7}{3} + 2 = -12$

c) $h(-1) = -3\,(-1)^2 - 1 + 2 = -2$

d) $h(3) = -3(3^2) + 3 + 2 = -22$

3. Primeiro vamos calcular $f(4)$ e $f(3)$ e depois substituir na expressão.

$f(4) = 2^4 - 3 \cdot 4 = 4$

$f(3) = 2^3 - 3 \cdot 3 = -1$

$2 \cdot f(4) - 5 \cdot f(3) = 2 \cdot 4 - 5 \cdot (-1) = 13$

Logo, o valor da expressão é 13.

4. Para ser uma função, cada elemento de A deve estar associado a um único elemento de B. A relação descrita associa o valor 5 ao seu dobro mais 3, ou seja, 13, e o valor 8 ao 19. Portanto, m deve ser igual a 13 e n igual a 19 para que a relação seja uma função.

Função constante e função afim

5. a) A raiz da função.

b) O valor do coeficiente n.

c) $g(0) = 1 \Rightarrow m \cdot 0 + n = 1 \Rightarrow n = 1$

$g(0)$ também pode ser lido no gráfico

$g(-1) = 0 \Rightarrow m \cdot (-1) + 1 = 0 \Rightarrow m = 1$

6. a) Pelo gráfico, temos que o reservatório estará completamente vazio em 35 minutos.

b) Ao observar o gráfico, vemos que o volume do reservatório estará pela metade entre os instantes 15 e 20 minutos. Como toda a água será evacuada em 35 minutos, e considerando que a vazão é constante – pois a curva do gráfico é uma reta –, podemos calcular o momento exato em que metade da água foi evacuada dividindo o tempo total pela metade. Logo, o reservatório conterá metade do volume inicial de água após 17,5 minutos.

c) Temos a seguinte relação:

$$\text{Vazão}_{\text{média}} = \frac{3\,500 \text{ litros}}{35 \text{ minutos}} = \frac{100 \text{ litros}}{\text{minuto}}$$

Portanto, a vazão média de água desse reservatório é 100 litros por minuto.

d) Se V corresponde ao volume de água dentro do reservatório e t ao tempo, temos:

$V = 3\,500 - 100t$

e) $0 < V < 3\,500$

$0 < t < 35$

7. a) Se N representa o número de pães fabricados e t, o tempo em horas, temos:

$N(t) = 200t$

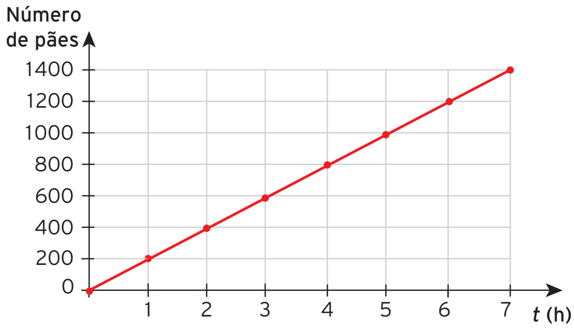
b) $N(t) = 200t$

$1200 = 200t$

$t = 6$ horas

c) Quando sair a quinta fornada, terão sido fabricados 1 000 pães (200 · 5), mas terão sido vendidos 720 pães (180 · 4) até este momento. Logo, faltarão 20 pães.

d) Exemplo do esboço do gráfico:



8. a) A função é do primeiro grau, pois o gráfico é uma reta.

b) A função é crescente, pois à medida que os valores de x aumentam, os de y também aumentam.

c) A intersecção em x é -3 e em y é 5.

d) $f(x) > 0$ para $x > -3$ e $f(x) < 0$ para $x < -3$.

e) A intersecção em x é -3, portanto -3 é a raiz da função.

9. a) Vamos considerar P como preço a ser pago e x como a distância percorrida.

Empresa A:

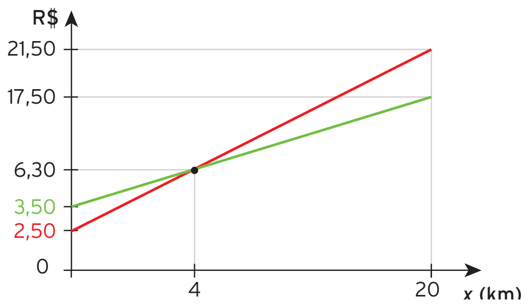
$P = 3{,}5 + 0{,}70x = 3{,}5 + 0{,}70 \cdot 20 = 17{,}50$

Empresa B:

$P = 2{,}5 + 0{,}95x = 2{,}5 + 0{,}95 \cdot 20 = 21{,}50$

Portanto, a opção de ir com o táxi da empresa A é a mais barata.

b) Exemplo do gráfico que deve ser obtido:



10. Vamos considerar x como o maior lado do retângulo e y o menor lado. Então:

$x + 2y = 34$

$y = 17 - \frac{x}{2}$

Logo

$A = x \cdot y = x \cdot \left(17 - \frac{x}{2}\right)$

Logo, a área do galinheiro será $x \cdot \left(17 - \frac{x}{2}\right)$ m².

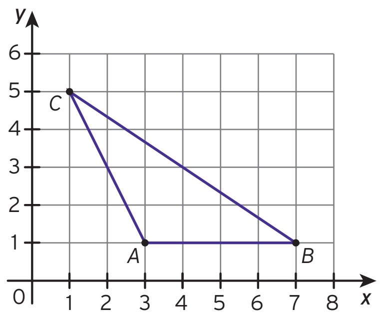
11. a) A função f assume valores negativos para $x < -3$ e $1 < x < 2$.

b) A função f assume valores positivos para $-3 < x < 1$ e $x > 2$.

c) A função f é constante para $-2 < x < 0$ e $x > 3$.

12. Para que essa função afim seja crescente é necessário que o coeficiente de x seja maior do que 0, ou seja, $k - 2 > 0$; logo, a função é crescente para $k > 2$.

13. a)



b) $\frac{(7-3) \cdot (5-1)}{2} = 8$

Logo, a área do triângulo ABC é 8.

14. a) A área de cada triângulo é dada por:

$A_{\triangle ABP} = \frac{4x \cdot x}{2} = 2x^2$

$A_{\triangle DPQ} = \frac{2x \cdot x}{2} = x^2$

$A_{\triangle BCQ} = \frac{2x \cdot 2x}{2} = 2x^2$

b) A área do triângulo BPQ será a área do retângulo menos a área dos triângulos ABP, DPQ e BCQ.

$A_{\triangle BPQ} = 4x \cdot 2x - (2x^2 + x^2 + 2x^2) =$

$= 8x^2 - 5x^2 = 3x^2$

Logo, a lei da função é $f(x) = 3x^2$.

c) $f(3) = 3(3^2) = 27$

$f(\sqrt{5}) = 3(\sqrt{5})^2 = 15$

d) $f(x) = 3x^2 = 36$

$x^2 = 12$

$x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Função quadrática

15. a) Parábola com concavidade para baixo.

b) As raízes da função.

c) O valor do coeficiente **c**.

d) $f(0) = 1 \Rightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 1 \Rightarrow c = 1$

$f(1) = 0 \Rightarrow a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 1 \Rightarrow a + b = -1$

$f(-1) = 0 \Rightarrow a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a - b = -1$

Podemos montar o seguinte sistema:

$\begin{cases} a + b = -1 \\ a - b = -1 \end{cases} \Rightarrow a = -1 \text{ e } b = 0$

Assim: $a = -1$, $b = 0$ e $c = 1$

Portanto, a função será definida por:

$f(x) = -x^2 + 1$

16. a) A função é do segundo grau, pois o gráfico é uma parábola.

b) Pode se dizer que $a > 0$, pois a parábola tem concavidade para cima e, $c = -4$, pois a intersecção em y corresponde à c.

c) As intersecções em x, ou seja, as raízes da função são -2 e 2.

d) O vértice da parábola é o ponto $V(0, -4)$ que é ponto de mínimo, pois a parábola tem concavidade para cima.

e) $f(0) = -4 \Rightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = -4 \Rightarrow$

$\Rightarrow c = -4$

$f(2) = 0 \Rightarrow a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 4 \Rightarrow 4a + 2b = 4$

$f(-2) = 0 \Rightarrow a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) - 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4a - 2b = 4$

Conseguimos montar o seguinte sistema:

$\begin{cases} 4a + 2b = 4 \\ 4a - 2b = 4 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \text{ e } b = 0$

Assim: $a = 1$, $b = 0$ e $c = -4$

Portanto, a função será definida por:

$f(x) = x^2 - 4$

f) Para $x < -2$ e $x > 2$, temos $y > 0$ e, para $-2 < x < 2$, temos $y < 0$.

g) O discriminante da equação é maior do que zero, pois há duas raízes reais e distintas.

h) Como $f(x) = x^2 - 4$, $f(10) = (10)^2 - 4 = 96$

i) $f(-20) = f(20)$, pois a reta $y = 0$ é o eixo de simetria da parábola.

j) A função é crescente para todo valor de x maior do que zero.

17. a) Pelo gráfico: $f(5) = 7$

b) Pelo gráfico: $f(1) = -2$

c) Pelo gráfico, as raízes de $f(x)$ são -1 e 3, ou seja, são os valores de x para $f(x) = 0$.

18. a) Falsa. Para $a < 0$, a concavidade do gráfico é para baixo.

b) Correta.

c) Falsa. Neste caso, o vértice de uma função quadrática intersecta o eixo das abscissas em um único ponto.

d) Correta.

19. a) Primeiro, vamos calcular o discriminante das duas funções.

Discriminante da f:

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-9) = 0$

Discriminante da g:

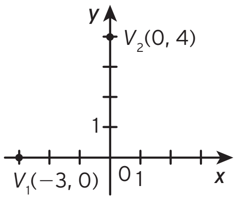
$\Delta = (0)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (4) = -16$

Então, os pontos de cada vértice serão:

$$V_1\left(-\frac{-6}{2 \cdot (-1)}, -\frac{0}{4 \cdot (-1)}\right) = V_1(-3, 0)$$

$$V_2\left(-\frac{0}{2 \cdot (1)}, -\frac{-16}{4 \cdot (1)}\right) = V_2(0, 4)$$

b)



20. Para que o gráfico da função f intersecte o eixo das abscissas em um único ponto, é necessário que seu discriminante seja igual a zero.

$\Delta = (-m)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (2m - 3) = 0$

$m^2 - 8m + 12 = 0$

Resolvendo essa equação de 2º grau, concluímos que os possíveis valores de m são 2 e 6.

21. a) Primeiro, vamos calcular o valor do discriminante.

$\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 14 = 25$

Como o discriminante é maior do que zero, temos duas raízes reais.

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{9 \pm 5}{2}$$

$x = 7$ ou $x = 2$

As raízes da f são 2 e 7.

b) Primeiro, vamos calcular o valor do discriminante.

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-8) = 4$

Como o discriminante é maior do que zero, temos duas raízes reais.

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{-2} = \frac{6 \pm 2}{-2}$$

$x = -4$ ou $x = -2$.

As raízes da g são -4 e -2.

c) Primeiro, vamos calcular o valor do discriminante.

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (12) \cdot (-6) = 289$

Como o discriminante é maior do que zero, temos duas raízes reais.

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{289}}{24} = \frac{1 \pm 17}{24}$$

$x = \frac{3}{4}$ ou $x = -\frac{2}{3}$

As raízes da h são $\frac{3}{4}$ e $-\frac{2}{3}$.

d) Primeiro, vamos calcular o valor do discriminante.

$$\Delta = (1)^2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3}$$

Como o discriminante é menor do que zero, a função i não tem raízes reais.

e) Primeiro, vamos calcular o valor do discriminante.

$\Delta = (-18)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 44 = 676$

Como o discriminante é maior do que zero, temos duas raízes reais.

$$x = \frac{18 \pm \sqrt{676}}{-4} = \frac{18 \pm 26}{-4}$$

$x = -11$ ou $x = 2$

As raízes da j são -11 e 2.

f) Primeiro, vamos calcular o valor do discriminante.

$\Delta = (0)^2 - 4 \cdot 100 \cdot 103 < 0$

Como o discriminante é menor do que zero, a função k não tem raízes reais.

22. a) Tomando A como a área do retângulo, temos:

$A = (4 - x) \cdot (2 + x) = -x^2 + 2x + 8$

Como o gráfico é uma parábola com concavidade para baixo, o vértice será ponto de máximo da função, assim:

$$x_{\text{vértice}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{-2} = 1$$

Para que a área do retângulo seja máxima, o valor de x deve ser 1.

b) A área será máxima para $x = 1$.

$A = -x^2 + 2x + 8 = -1^2 + 2 \cdot 1 + 8 = 9$

O valor da área máxima é 9.

c) A figura obtida é um quadrado de lado 3.