Para Viver Juntos

9

Matemática

ENSINO FUNDAMENTAL 9º ano

Atividades complementares

Samuel Casal

sm

Razão e proporção

1. Veja a fotografia abaixo e responda aos itens adiante.

EDHAR/Shutterstock.com

a) Determine a razão entre o número de homens e o número de mulheres nessa fotografia.

b) Determine o número de mulheres que deve ser adicionado para que a quantidade de mulheres seja 60% do total de pessoas.

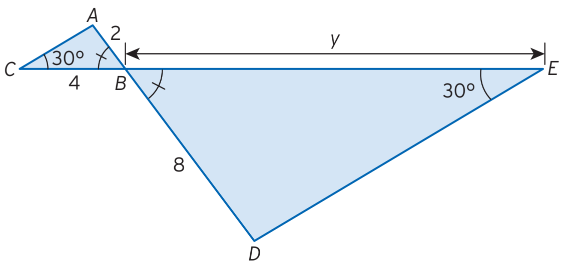
2. Hoje, a razão entre a idade de Juvenal e a idade do pai dele é $\frac{1}{3}$. Qual será a razão entre as idades deles, quando Juvenal tiver o dobro da idade que ele tem hoje?

3. Os segmentos AB e CD são proporcionais a PQ e RS. Determine a medida do segmento PQ, sabendo que $AB = 7$ cm, $CD = 3$ cm e $RS = 4{,}5$ cm.

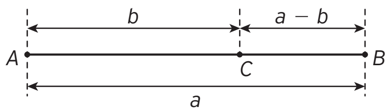
4. Joaquim resolveu distribuir 23 selos entre os quatro netos dele. Para isso, ele dividiu a quantidade de selos em partes proporcionais à idade de cada neto.

Sabendo que André tem 12 anos, Rodrigo, 14 e que as gêmeas Geórgia e Vitória têm 10 anos, calcule quantos selos cada um recebeu.

5. Sabendo que a razão entre as medidas AB e BD é igual à razão entre CB e BE, determine o valor de y.



6. Considere um segmento de reta AB, dividido por um ponto C, entre A e B.

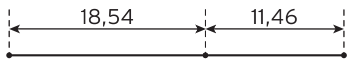


Denomina-se proporção áurea quando a seguinte proporção é satisfeita:

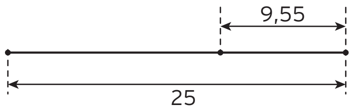
$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{a - b}{b} = \frac{b}{a}$$

Dessa proporção, se $a = 1$, então $b \cong 0{,}618$. Assinale a alternativa que não contém proporção áurea.

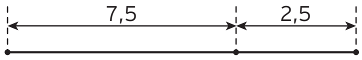
a)



b)

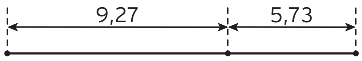


c)



d)

e)



Teorema de Tales

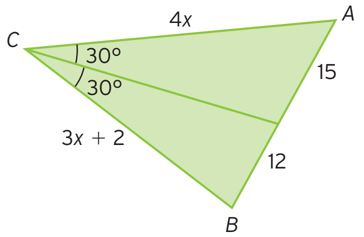
7. Observe a escada instalada em um píer. O último degrau da escada fica no mesmo nível que a água na maré baixa.

Indos82/Dreamstime.com

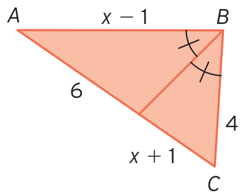
Sabe-se que em maré alta o nível da água sobe 30 cm e com isso 40 cm da escada fica submersa. Se, durante essa maré alta, a distância entre o nível do mar e o ponto de apoio da escada no píer é 37,5 cm, qual é o comprimento da parte da escada que não está submersa?

8. Determine o valor de x nos triângulos abaixo.

a)

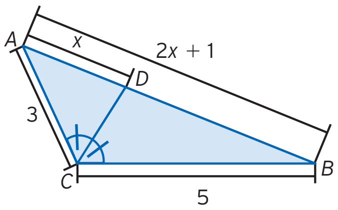


b)

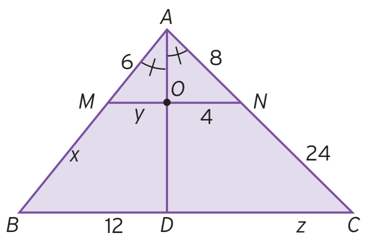


9. Dois lados de um triângulo ABC são cortados por uma reta paralela ao lado AB, de maneira que sobre o lado CB são determinados um segmento de 15 cm e outro de 18 cm. Sabendo que $CA = 22$ cm, determine as medidas dos segmentos determinados sobre CA.

10. Determine o perímetro do triângulo ABC a seguir.

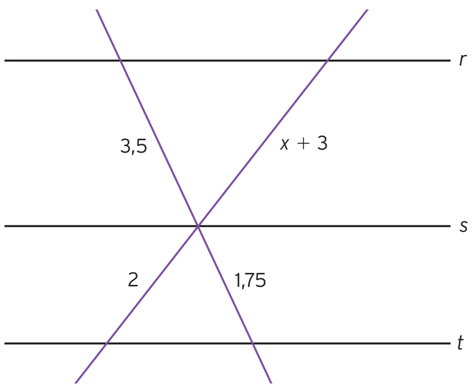


11. No triângulo ABC ilustrado a seguir, AD é bissetriz do ângulo $\hat{A}$ e $MN \,//\, BC$.

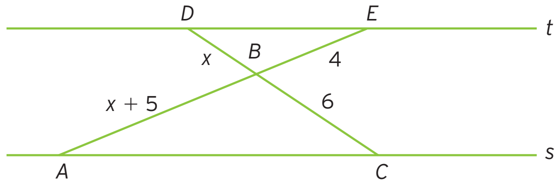


Qual é o perímetro dos triângulos ABC e AMN?

12. Determine o valor de x, sabendo que $r \,//\, s \,//\, t$.

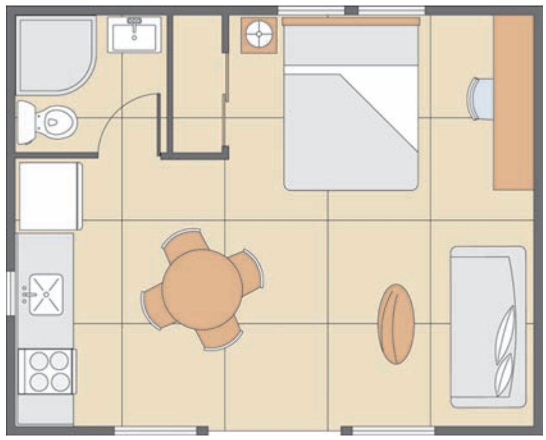


13. Determine as medidas de AB e BD da figura a seguir, sabendo que $AC \,//\, DE$, $AB = x + 5$ cm, $BE = 4$ cm, $BD = x$ e $BC = 6$ cm.



Semelhança de figuras

14. A figura abaixo representa a planta de uma quitinete (quarto-sala-cozinha) com dimensões de 10 cm por 8 cm.



Shutterstock.com

a) Qual é a razão entre a maior e a menor dimensão da quitinete?

b) Se as dimensões reais dessa quitinete são 10 m × 8 m, qual é a escala do desenho?

15. Dois hexágonos regulares A e B são semelhantes, e a razão de semelhança de A para B é $\frac{3}{4}$.

a) Determine a medida de cada lado de A, sabendo que o lado de B mede 12.

b) Determine a razão entre as áreas de A e B.

16. Suponha que você possua uma fotografia 3 × 4 da qual goste muito. Para dar de recordação à sua madrinha você solicita a ampliação dessa imagem para obter uma fotografia de 10 × 15. O que pode acontecer à imagem quando ampliada?

17. Lúcia quer montar a maquete do quarto da casa onde mora, o qual tem dimensões 3 metros por 4 metros.

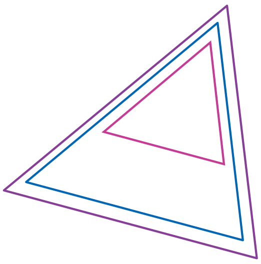
a) É possível montar a maquete dentro de uma caixa de sapatos, com medidas 33 cm por 24 cm?

b) Se essa maquete for feita na caixa de sapatos de 33 cm por 24 cm de modo que a medida da parede de 3 metros do quarto seja representada no lado de 24 centímetros da caixa, a quantos centímetros corresponderá a parede de 4 metros?

c) Qual será a escala utilizada?

d) De que tamanho deverá ser feita a cama da maquete, se a cama em que Lúcia dorme tem dimensões 1,90 m × 90 cm × 40 cm?

18. Na figura abaixo, os lados dos três triângulos são paralelos.



a) É possível afirmar que os três triângulos são semelhantes? Por quê?

b) Sabendo que o perímetro do triângulo maior é 16 cm e o do menor é 6 cm, é possível calcular as medidas dos lados do triângulo menor? Explique.

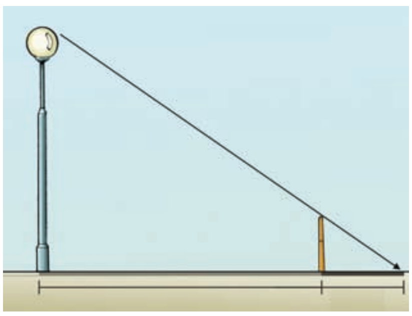
19. Considere que os conjuntos xícara-pires mostrados na fotografia sejam semelhantes.

irakite/Shutterstock.com

a) Se a altura e o diâmetro da boca da xícara grande medem 10 cm e 9 cm e a altura da xícara pequena mede 6 cm, determine o diâmetro da boca da xícara menor.

b) Se a área do pires maior é 170 cm^2, determine a área do pires menor.

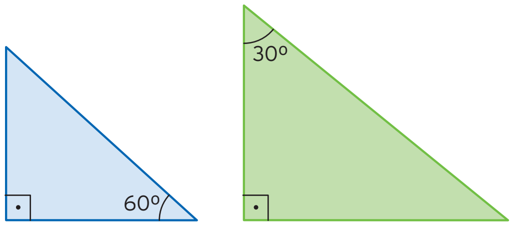
20. Para determinar a altura de uma torre de iluminação, uma pessoa fincou um bastão de 0,5 m de altura a 25 m do pé da torre. Em seguida, observou o comprimento da sombra do bastão que a luz no topo da torre projetava no chão. Veja a figura.



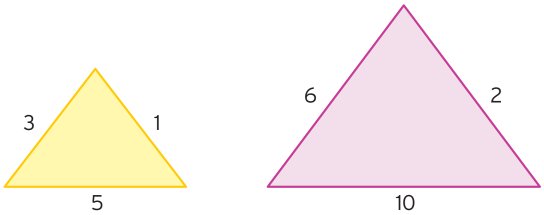
Determine a altura da torre, considerando que o comprimento da sombra é 1 m.

21. Verifique se os triângulos ilustrados em cada item são semelhantes e, em caso afirmativo, identifique o caso que justifica a semelhança.

a)



b)



22. Um triângulo ABC tem lados de medida $AB = 10$, $AC = 12$ e $BC = 15$. Determine as medidas dos lados de um triângulo $A'B'C'$ semelhante ao triângulo ABC, sabendo que $A'B' = 15$.

23. O triângulo maior da figura é formado por triângulos idênticos.

luchschen/Shutterstock.com

a) Se o perímetro do triângulo maior é 18 cm, determine a medida do lado de cada triângulo menor.

b) Determine a razão entre as áreas do triângulo maior e menor.

24. A sombra do garoto da figura abaixo mede 108 cm.

Elena Yakusheva/Shutterstock.com

Um bastão de 80 cm de comprimento colocado ao lado do garoto da figura na mesma hora tem uma sombra que mede 96 cm. Determine a altura do garoto.

25. Qual dos sólidos abaixo, quando seccionados por um plano paralelo à base, possibilita o estudo da homotetia?

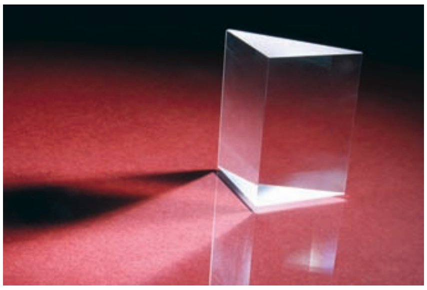
a)

Terekhov Igor/Shutterstock.com

b)

sculpies/Shutterstock.com

c)



HomeStudio/Shutterstock.com

d)

Shutterstock.com

e)

koya979/Shutterstock.com

26. Em dois triângulos equiláteros e semelhantes de tamanhos distintos, determine o perímetro do triângulo menor, sabendo que a razão entre as medidas dos lados do triângulo maior e do triângulo menor é $\frac{2}{3}$ e que o perímetro do triângulo maior é 18 cm.

27. A escada abaixo tem 7 degraus, distantes 30 cm um do outro.

wacpan/Shutterstock.com

O primeiro degrau (menor) tem 30 cm de largura, o segundo 33 cm. Qual é a largura do último degrau?

Para Viver Juntos

9

Matemática

ENSINO FUNDAMENTAL 9º ano

Resolução comentada

Samuel Casal

sm

Razão e proporção

1. a) Na fotografia, há 10 mulheres e 8 homens. Portanto, a razão entre o número de homens H e o número de mulheres M será:

$\frac{H}{M} = \frac{8}{10}$

Logo, a razão é $\frac{8}{10}$.

b) Da fotografia, sabemos que há 10 mulheres e 18 pessoas. No total T e tomando x como o número de mulheres a acrescentar na fotografia, temos:

$\frac{M + x}{T + x} = 0{,}60$

$\frac{10 + x}{18 + x} = 0{,}60$

$10 + x = 0{,}60 \cdot (18 + x)$

$10 + x = 10{,}8 + 0{,}6x$

$0{,}40x = 0{,}8$

$x = 2$

Logo, é necessário acrescentar 2 mulheres para que elas representem 60% do total de pessoas na fotografia.

2. Seja J a idade de Juvenal e P a idade de seu pai.

$\frac{J}{P} = \frac{1}{3} \Rightarrow P = 3J$

Quando a idade de Juvenal for o dobro do que é atualmente ($2J = J + J$), escrevemos a seguinte razão:

$\frac{J + J}{P + J}$

Substituindo P por $3J$, obtemos:

$\frac{2J}{3J + J} = \frac{2J}{4J} = \frac{1}{2}$

Quando Juvenal estiver com o dobro da idade que tem hoje, a razão entre sua idade e a de seu pai será $\frac{1}{2}$.

3. Pelo enunciado temos:

$\frac{AB}{PQ} = \frac{CD}{RS}$

$\frac{7}{PQ} = \frac{3}{4{,}5}$

$7 \cdot 4{,}5 = 3 \cdot PQ$

$PQ = \frac{31{,}5}{3} = 10{,}5$

Logo, o segmento PQ mede 10,5 cm.

4. Como Joaquim quer dividir os selos proporcionalmente à idade dos seus quatro netos, vamos primeiro determinar a razão da idade de cada neto com a soma da idade de todos eles, ou seja, $12 + 14 + 10 + 10 = 46$; logo, a razão da idade de cada um será:

André: $\frac{12}{46} = \frac{6}{23}$

Rodrigo: $\frac{14}{46} = \frac{7}{23}$

Geórgia e Vitória: $\frac{10}{46} = \frac{5}{23}$

Agora, multiplicando cada razão pelo total de selos, conseguimos obter a quantidade de selos que cada neto receberá:

André receberá $\frac{6}{23} \cdot 23$ selos $= 6$ selos

Rodrigo receberá $\frac{7}{23} \cdot 23$ selos $= 7$ selos

Geórgia e Vitória receberão

$\frac{5}{23} \cdot 23$ selos $= 5$ selos cada um.

5. $\frac{AB}{BD} = \frac{CB}{BE}$

Substituindo pelos valores do desenho:

$\frac{2}{8} = \frac{4}{y}$

$y = \frac{4 \cdot 8}{2} = 16$

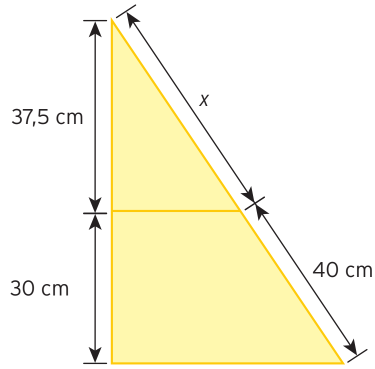
Logo, o valor de y é 16.

6. A alternativa **c** é a única que não contém proporção áurea, pois:

$\frac{2{,}5}{7{,}5} \neq \frac{7{,}5}{10} \neq 0{,}618$

Teorema de Tales

7. Com as informações do texto podemos esboçar a situação.



Pelo teorema de Tales ou por semelhança de triângulos, obtemos:

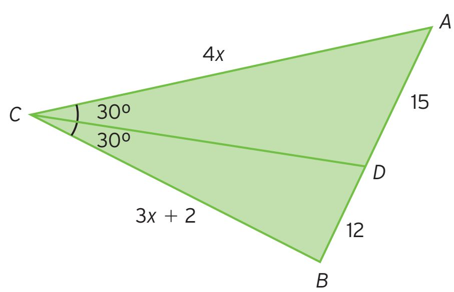
$\frac{37{,}5}{30} = \frac{x}{40}$

$37{,}5 \cdot 40 = 30x$

$x = 50$

Portanto, durante a maré alta o comprimento da parte emersa da escada é 50 cm.

8. a)



Como o segmento CD é a bissetriz do triângulo ABC, temos:

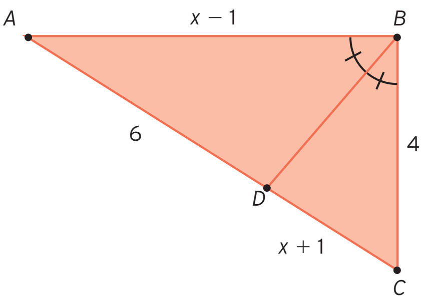
$$\frac{CB}{BD} = \frac{CA}{DA}$$

$$\frac{3x + 2}{12} = \frac{4x}{15}$$

$$48x = 45x + 30$$

$$x = \frac{30}{3} = 10$$

Portanto, o valor de x é 10.

b) 

Como o segmento BD é a bissetriz do triângulo ABC, temos:

$$\frac{BA}{AD} = \frac{BC}{DC}$$

$$\frac{x - 1}{6} = \frac{4}{x + 1}$$

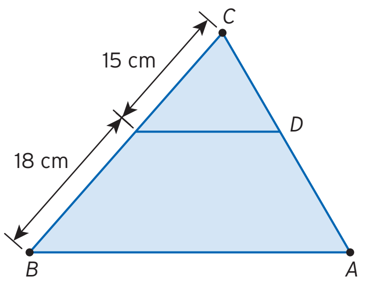
$$x^2 - 1 = 24$$

$$x^2 = 25$$

$$x = \pm 5$$

Portanto, neste caso, o valor de x é 5.

9. Pelo enunciado, temos a seguinte figura:



Sabemos que $CA = 22$ cm, então pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{15}{15 + 18} = \frac{CD}{22}$$

$$CD = \frac{15 \cdot 22}{33} = 10$$

$$AD = 22 - CD = 12$$

Logo, as medidas dos segmentos determinados sobre AC são 10 cm e 12 cm.

10. Para determinar o perímetro do triângulo ABC é necessário determinar a medida do segmento AB. Como o segmento CD é a bissetriz do triângulo ABC, temos:

$$\frac{CB}{BD} = \frac{CA}{DA}$$

$$\frac{5}{(2x + 1) - x} = \frac{3}{x}$$

$$5x = (2x - x + 1) \cdot 3$$

$$5x = 3x + 3$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$AB = 2\left(\frac{3}{2}\right) + 1 = 4$$

Portanto, o perímetro do triângulo ABC é 3 cm + 4 cm + 5 cm = 12 cm.

11. Primeiro vamos determinar os valores de x, y e z. Para isso, basta utilizar o teorema de Tales em todos os casos.

Para x:

$$\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$$

$$\frac{8}{8 + 24} = \frac{6}{6 + x}$$

$$8x + 48 = 192$$

$$x = \frac{144}{8} = 18$$

Para y:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MO}{BD}$$

$$\frac{6}{6 + x} = \frac{y}{12}$$

$$\frac{6}{6 + 18} = \frac{y}{12}$$

$$24y = 72$$

$$y = \frac{72}{24} = 3$$

Para z:

$$\frac{AN}{AC} = \frac{NO}{CD}$$

$$\frac{8}{8 + 24} = \frac{4}{z}$$

$$8z = 128$$

$$z = \frac{128}{8} = 16$$

Então, $x = 18$ cm, $y = 3$ cm e $z = 16$ cm.

Logo, o perímetro do triângulo ABC é $6 + 18 + 12 + 16 + 24 + 8 = 84$, ou seja, 84 cm, e o perímetro do triângulo AMN é $6 + 3 + 4 + 8 = 21$, ou seja, 21 cm.

12. Aplicando o teorema de Tales, temos:

$$\frac{x + 3}{2} = \frac{3{,}5}{1{,}75}$$

$$\frac{x + 3}{2} = 2$$

$$x = 4 - 3 = 1$$

Portanto, o valor de x é 1.

13. Primeiro, vamos determinar o valor de x aplicando o teorema de Tales.

$$\frac{4}{x + 5} = \frac{x}{6}$$

$$x^2 + 5x = 24$$

$$x^2 + 5x - 24 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24)}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{2}$$

$x = -8$ ou $x = 3$.

Como x é a medida de um segmento, ele é positivo; logo $x = 3$ cm.
Portanto, $AB = 8$ cm e $BD = 3$ cm.

Semelhança de figuras

14. a) $\dfrac{\text{maior dimensão}}{\text{menor dimensão}} = \dfrac{10}{8} = \dfrac{5}{4} = 1{,}25$

Logo, a razão é 1,25.

b) $\dfrac{\text{dimensão desenho}}{\text{dimensão real}} = \dfrac{10 \text{ cm}}{10 \text{ m}} = \dfrac{10 \text{ cm}}{1000 \text{ cm}} = \dfrac{1}{100}$

Portanto, a escala é 1 : 100.

15. a) Como os dois hexágonos são regulares, e a razão de A para B é $\dfrac{3}{4}$, temos:

$\dfrac{A}{B} = \dfrac{3}{4}$. E como o lado B mede 12, então o lado A é:

$\dfrac{\text{lado } A}{12} = \dfrac{3}{4}$

lado $A = 9$

Logo, a medida do lado do hexágono A é 9.

b) $\dfrac{\text{Área}_A}{\text{Área}_B} = \dfrac{\left(\dfrac{3}{2} \cdot 9^2\right)}{\left(\dfrac{3}{2} \cdot 12^2\right)} = \dfrac{9^2}{12^2} = \dfrac{9}{16}$

A razão entre as áreas de A e B é $\dfrac{9}{16}$.

16. Os retângulos de dimensões 3×4 e 10×15 não são semelhantes, pois:

$$\frac{3}{4} \neq \frac{10}{15}$$

Então, se a fotografia 3×4 for ampliada para 10×15, poderão ocorrer as seguintes situações:

- a imagem ficará distorcida;
- parte da lateral ficará cortada, caso a imagem seja ampliada proporcionalmente, mantendo sua altura;
- haverá uma parte da fotografia (em cima ou embaixo) que não será aproveitada, caso a imagem seja ampliada proporcionalmente, mantendo sua largura.

17. a) Não é possível montar a maquete usando toda a dimensão da caixa de sapatos, pois $\dfrac{24}{3} \neq \dfrac{33}{4}$ e $\dfrac{33}{3} \neq \dfrac{24}{4}$, ou seja, não há uma razão de semelhança entre as medidas.

b) Se utilizarmos o lado da caixa de 24 cm para representar o lado do quarto que tem 3 m, teremos a razão do quarto para a maquete de $\dfrac{24}{3} = 8$. Logo, a medida, em cm, para representar a outra parede do quarto deverá ser $8 \cdot 4 = 32$. Ou seja, 32 cm corresponderá a 4 m.

c) A escala é dada por:

$\dfrac{\text{dimensão da maquete}}{\text{dimensão real}} = \dfrac{24 \text{ cm}}{3 \text{ m}} = \dfrac{24 \text{ cm}}{300 \text{ cm}} = \dfrac{1}{12{,}5}$

Logo, a escala é 1:12,5.

d) Utilizando a escala e denominando a dimensão correspondente a 1,90 m de x, a 90 cm de y e a 40 cm de z, temos:

Para 1,90 m = 190 cm:

$x = \dfrac{190}{12{,}5} = 15{,}2$

Para 90 cm:

$y = \dfrac{90}{12{,}5} = 7{,}2$

Para 40 cm:

$z = \dfrac{40}{12{,}5} = 3{,}2$

Então, as dimensões da cama serão 15,2 cm $\times$ 15,2 cm $\times$ 3,2 cm.

18. a) Sim, pois como os três lados são paralelos, os seus ângulos são congruentes, e isso satisfaz o caso AA de semelhança de triângulos.

b) Não é possível, seria necessário mais informações, como a medida do lado do triângulo maior, por exemplo.

19. a) Como estamos considerando os conjuntos xícara-pires semelhantes, temos:

$\begin{cases} 10 \text{ cm} = 9 \text{ cm} \\ 6 \text{ cm} = x \end{cases}$

$x = \dfrac{6 \cdot 9}{10} = 5{,}4$

Logo, o diâmetro da xícara menor é 5,4 cm.

b) Sabemos que a razão de semelhança dos conjuntos é válida, ou seja:

$\dfrac{d_{\text{maior}}}{d_{\text{menor}}} = k = \dfrac{9}{5{,}4} = \dfrac{5}{3}$

Logo, a área será dada por:

$\dfrac{A_{\text{maior}}}{A_{\text{menor}}} = k^2 = \left(\dfrac{5}{3}\right)^2 = \dfrac{25}{9}$

Então:

$\dfrac{170}{A_{\text{menor}}} = \dfrac{25}{9}$

$A_{\text{menor}} = \dfrac{170 \cdot 9}{25} = 61{,}2$

Portanto, a área do pires menor é 61,2 cm^2.

20. Vamos denominar H a altura da torre e, por semelhança de triângulos, temos:

$\dfrac{H}{0{,}5} = \dfrac{25 + 1}{1}$

$H = 13$

Logo, a altura da torre é 13 metros.

21. a) Sim, pois a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180°. Logo, o ângulo que falta no triângulo azul mede 30°. O mesmo ocorre no triângulo verde: o ângulo que falta mede 60°. Portanto, os dois triângulos têm ângulos congruentes, e o caso que justifica a semelhança é o AA.

b) Os lados correspondentes dos dois triângulos são proporcionais. Logo, os triângulos são semelhantes, e o caso que justifica a semelhança é o LLL.

22. Como os triângulos *ABC* e *A'B'C'* são semelhantes, há uma razão de semelhança, que é dada por:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

Para determinar as medidas dos lados *B'C'* e *C'A'*, igualamos a razão de semelhança com a razão entre os outros lados dos triângulos:

Lado *B'C'*:

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{2}{3}$$

$$B'C' = \frac{3 \cdot 15}{2} = 22{,}5$$

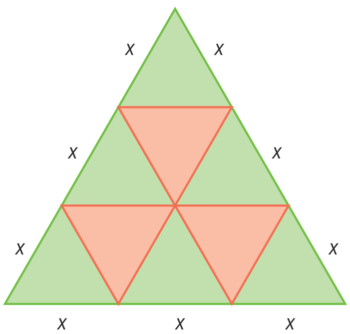
Lado *C'A'*:

$$\frac{CA}{C'A'} = \frac{2}{3}$$

$$C'A' = \frac{3 \cdot 12}{2} = 18$$

Portanto, os lados do triângulo *A'B'C'* medem 15 cm, 22,5 cm e 18 cm.

23. a) Se cada lado dos triângulos menores tem medidas x, então, o perímetro do triângulo maior é $9x$.



$9x = 18$

$x = 2$

Então, o lado do triângulo menor mede 2 cm.

b) Se a medida do lado do triângulo maior é $3x$ e a medida do lado do triângulo menor é x, a razão de semelhança k será:

$$k = \frac{3x}{x} = 3$$

Logo, a razão entre as áreas do triângulo maior com o menor é:

$k^2 = 3^2 = 9$

Logo, a razão entre as áreas do triângulo maior e menor é 9.

24. Seja H_g a altura do garoto, S_g o comprimento da sombra do garoto e H_b e S_b a altura e a sombra do bastão, temos:

$$\frac{H_g}{S_g} = \frac{H_b}{S_b} \Rightarrow \frac{H_g}{108} = \frac{80}{96}$$

$H_g = 90$

Portanto, a altura do garoto é 90 cm.

25. Somente a alternativa **b**. Seccionando uma pirâmide por um plano paralelo à base, obtém-se uma figura semelhante à base cujos lados são paralelos aos lados correspondentes da base. Portanto, essas figuras são homotéticas e o vértice da pirâmide corresponde ao centro de homotetia.

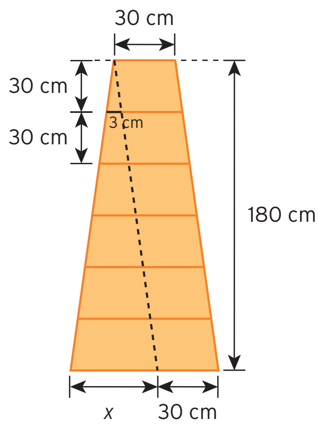
26. Para calcular o perímetro do menor triângulo, vamos utilizar a razão de semelhança entre os lados. Seja x o perímetro desse triângulo, então:

$$\frac{2}{3} = \frac{x}{18}$$

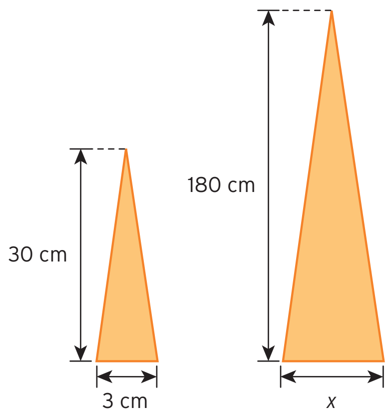
$$x = \frac{18 \cdot 2}{3} = 12$$

Portanto, o perímetro do triângulo menor é 12.

27.



Como o maior e o menor triângulos da figura acima são semelhantes:



$$\frac{30}{180} = \frac{3}{x}$$

$x = 18$

Então, $x = 18$ cm.

Como o último degrau mede $x + 30$ cm, o seu comprimento será 48 cm.